

תלמידים יקרים

ברוכים הבאים ל OpenBook,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **חשבון דיפרנציאלי**: פונקציה אי רציונלית / שורש, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר - בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. ✓

מצאתם טעות? נשמח שתשלחו לנו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook

רוית הלפנבאום

חשבון דיפרנציאלי

✓ חקירת פונקציה

תחום הגדרה

תחום הגדרה של פונקציה



שורש ריבועי לא מוגדר עבור מספרים שליליים

$$y = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$y = \sqrt{x-2} \quad \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{matrix}$$

תחום ההגדרה של שבר

הוא שהמכנה שלו שונה מאפס

$$y = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \begin{matrix} x-4 \neq 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}$$

✓ נקודת קיצון נקודות מקסימום מקומי

בנקודות המינימום והמקסימום הנגזרת של הפונקציה שווה לאפס.

לכן, אם נרצה למצוא את שיעור ה-x של נקודות הקיצון (min/max) נמצא את הנגזרת ונשווה את הנגזרת לאפס.

✓ אז מצאנו נקודת קיצון, איך נקבע את סוג הקיצון (min/max)?

לשם כך ניתן להיעזר באחת משתי השיטות:

(1) באמצעות טבלה

(2) באמצעות נגזרת שנייה (קיימים מקרים שלא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה (!!))

קביעת נקודת קיצון באמצעות טבלה

נקודה גדולה מהנק' החשודה	שיעור x של נק' קיצון	נקודה קטנה מהנק' החשודה
	נציב את שיעור x בנגזרת y'	
	אם $y' > 0$ נצייר חץ עולה אם $y' < 0$ נצייר חץ יורד	

קביעת נקודת קיצון באמצעות נגזרת שנייה

שימו לב !! קיימים מקרים בהם לא ניתן לבדוק באמצעות נגזרת שנייה ולכן מומלץ לקבוע

באמצעות טבלה !

נגזור שוב את הפונקציה ונציב את שיעור ה- x של נקודת הקיצון.

אם $y'' > 0$ אז זאת נקודת מינימום

אם $y'' < 0$ אז זאת נקודת מקסימום

תחומי עלייה וירידה

נראה באמצעות הטבלה מתי יש עלייה ומתי יש ירידה

נקודות חיתוך עם הצירים

נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר y .

הנקודה $A(,)$ "יושבת" על ציר y .

נקודת החיתוך עם ציר ה- x היא הנקודה בה הפונקציה חותכת/נפגשת עם ציר x .

הנקודה $B(,)$ "יושבת" על ציר x .

שרטוט סקיצה

נסמן במערכת הצירים את נקודות החיתוך עם הצירים ,

את נקודות הקיצון שמצאנו (מינימום ומקסימום)

ניצור כובעים לפי נקודת סיווג נקודות הקיצון (אם מינימום: U מקסימום: \cap)

נחבר בין הנקודות ונקבל את הסקיצה של גרף הפונקציה

✓ הכרות עם פונקציית שורש

שרטט את גרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$

האם ניתן לקבוע את סימן הנגזרת באמצעות הגרף?

✓ תחום הגדרה פונקציית שורש

הביטוי שבתוך השורש חייב להיות אי שלילי

$$y = \sqrt{f(x)}$$

$$f(x) \geq 0$$

שורש של ביטוי יכול להיות מוגדר רק כאשר הביטוי גדול מאפס או שווה אפס.

✓ מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x - 2}$$

$$y = \sqrt{3 - 2x}$$

$$y = 3\sqrt{-x} + 6$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$y = \sqrt{-x^2 + 4}$$

✓ פיתוח נוסחת הנגזרת של פונקציית שורש

נמצא דרך I לפיתוח נוסחת הנגזרת של פונקציית שורש

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$$

נמצא דרך II לפיתוח נוסחת הנגזרת של פונקציית שורש

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

✓ גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x-2}$$

$$y = \sqrt{3-2x}$$

$$y = 3\sqrt{-x} + 6$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$y = \sqrt{-x^2 + 4}$$

$$y = 3\sqrt{x} - x$$

$$y = 2x^2\sqrt{x}$$

נגזרת מכפלה ושורש

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x+18} \quad \checkmark .1$$

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4x+20} \quad \checkmark .2$$

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{2x+10} \quad \checkmark .3$$

נגזרת מנה ושורש

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-15}} \quad \checkmark .1$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x-2}} \quad \checkmark .2$$

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}} \quad \checkmark .3$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \quad \checkmark .4$$

$$f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}} \quad \checkmark .5$$

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}} \quad \checkmark .6$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x} \quad \checkmark .7$$

✓ אסימפטוטה אנכית ונקודת חור

שלב א' משווים את המכנה לאפס ופותרים את המשוואה במידה והתקבלו פתרונות, הפתרונות יכולים להיות אסימפטוטות אנכיות.

שלב ב' מציבים במונה את כל אחד מהערכי ה- X שהתקבלו בשלב א' יתכנו המקרים הבאים:

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-16} \text{ דוגמה א'}$$

$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9} \text{ דוגמה ב'}$$

שלב ב' מקרה (1)

אם המונה לא מתאפס

$$(x = x_1 \text{ לאחר הצבה במונה את הפתרון})$$

והתקבל מספר ממשי השונה מאפס,

אז הישר $x = x_1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

שלב ב' מקרה (2)

אם במונה מתקבל מספר שאינו ממשי

$$(x = x_1 \text{ לאחר הצבה במונה את הפתרון})$$

אז הישר $x = x_1$ אינו אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

שלב ב' מקרה (3)

אם המונה מתאפס אז קיים חשד שלא מתקבלת אסימפטוטה אנכית אלא נוצר "חור" בגרף.

יש 2 דרכים עיקריות לפתרון:

(א) מצמצמים את הפונקציה עד כמה שניתן ולאחר הצמצום בודקים אם הערך x_1 מאפס את המכנה.

אם כן, אז התקבלה אסימפטוטה אנכית, אם לא אז נוצר "חור" בגרף.

(ב) מציבים בפונקציה ערכי x ההולכים ומתקרבים ל- x_1 .

אם ערך הפונקציה מתקרב למספר מסוים, נוצר "חור" בגרף

ואם ערך הפונקציה מתקרב לפלוס אינסוף או מינוס אינסוף, אז הישר $x = x_1$ הוא אסימפטוטה אנכית

תרגיל

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-16} \text{ נתונה הפונקציה:}$$

א. מצא תחום הגדרה

ב. אסימפטוטות אנכיות

תרגיל

נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

א. מצא תחום הגדרה

ב. אסימפטוטות אנכיות

אסימפטוטה אופקית של פונקצית שורש ומנה

כאשר נרצה למצוא אסימפטוטה אופקית:

(1) כאשר $x \rightarrow +\infty$ מתקיים $\sqrt{x^2} = x$

(2) כאשר $x \rightarrow -\infty$ מתקיים $\sqrt{x^2} = -x$

תרגיל

נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-9}}$

א. מצא תחום הגדרה

ב. אסימפטוטות אופקית

תרגיל

נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

א. מצא תחום הגדרה

ב. אסימפטוטות אנכית ואופקית

תרגיל

נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-1}}{2x}$

א. מצא תחום הגדרה

תרגילים חקירת פונקציה אי רציונלית מבגרויות 3-4 יח"ל

(1) ✓

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 8\sqrt{x}$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה. נמק.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק את תשובתך.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ה. קבע איזה מן הגרפים $IV - I$ שלפניך הוא גרף של הפונקציה $f(x)$

(2) ✓

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

ה. נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(0, 2.52)$.

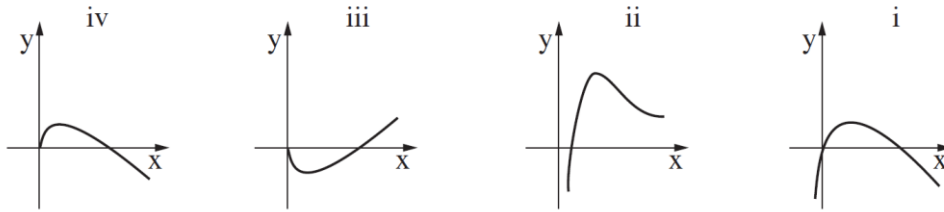
היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) ✓

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את x שעבורו $f'(x) = 0$.
- ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.
- ה. איזה מהגרפים i-iv שלפניך הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



תרגילים מסכמים

✓ (1)

לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{cx^2}$ יש קיצון בנקודה $(8; \frac{\sqrt{2}}{8})$.

א. חשב את a ואת c .

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה

(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

✓ (2)

מצא נקודות פיתול לפונקציה: $y = x\sqrt{x-3}$

✓ (3)

חקור את הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{4-x^2}$

קיץ מועד ג 2014 שאלה 7

(4) ✓

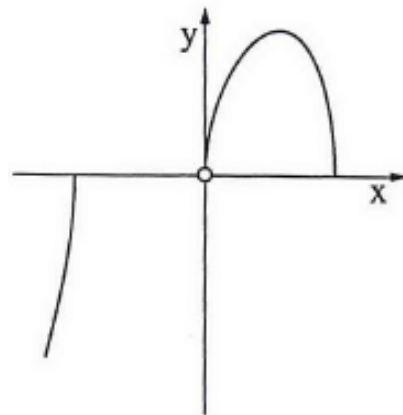
בציור שלפניך מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{12x^3 - x^5}}{x}$, שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \leq -2\sqrt{3}, 0 < x \leq 2\sqrt{3}$.

א. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק.
מצא את תחום הערכים של k .

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{12x - x^3}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $x \leq -2\sqrt{3}, 0 < x \leq 2\sqrt{3}$.
(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א', מצא בכמה נקודות חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.



פרמטר פונקציה אי רציונלית - שורש

התרגילים הבאים הם חלק משאלה מבגרות. נפתור את החלק הקשור לפרמטר בלבד.

✓ קיץ 2006 מועד א

נתונה הפונקציה $y = \sqrt{ax^2 - 16a}$, $a \neq 0$ פרמטר.

א. חשב את הערך של a , אם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה נקודה שבה $x=8$ הוא $\sqrt{\frac{2}{3}}$

✓ 804 קיץ תשע 2010 המבחן הגנוז

נתונה הפונקציה $f(x) = ax - \sqrt{2 - x^2}$, a הוא פרמטר.

א. הישר $y = -x - \sqrt{2}$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y . מצא את הערך של a .