

## משוואות טריגונומטריות

משוואה טריגונומטרית היא משוואה שבה מופיעות פונקציות טריגונומטריות המכילות נעלם.

$$\text{למשל, המשוואות: } \sin x = \frac{1}{2}, \quad 8 \cos 3x = 2, \quad \sin x = 4 \cos x.$$

המטרה היא למצוא את הערכים של  $x$  המקיימים את המשוואה.

### פתרונות יסודיים של משוואות מהצורה $\sin(ax + b) = m$

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה מהצורה  $\sin x = a$  ניעזר בשתי הזהויות:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha \quad (2)$$

**מהזהות הראשונה** נקבל שאם זווית  $\alpha$  היא פתרון של המשוואה  $\sin x = a$  אז גם הזווית  $180^\circ - \alpha$  היא פתרון נוסף של המשוואה

**מהזהות השנייה** נקבל שאם זווית  $\alpha$  היא פתרון של המשוואה  $\sin x = a$  אז גם זוויות המתקבלות ע"י הוספת/חיסור כפולות שלמות של  $360^\circ$  מהזווית  $\alpha$  הן פתרונות של המשוואה.

### פתרונות כלליים (מחזוריים) של משוואות מהצורה $\sin(ax + b) = m$

נרשום את כל הפתרונות בעזרת האות  $k$ , המייצגת מספר שלם.

אם  $\alpha$  הוא פתרון של המשוואה אז פתרון כללי הוא:

$$\alpha + 360^\circ k$$

$$k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

#### תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin x = \frac{1}{2}$

ואת כל הפתרונות בתחום:  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$

✓ **השליבים בפתרון המשוואה  $\sin(ax + b) = m$**

(1) בודקים תחום הגדרה:  $\sin x = a \quad -1 \leq a \leq 1$

(2) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי  $\alpha$  שמקיים:  $\sin \alpha = a$

(3) מוצאים פתרון יסודי נוסף:  $180^\circ - \alpha$

(4) מוסיפים  $360^\circ k$  לכל אחד מהפתרונות היסודיים ומקבלים את הפתרונות הכלליים:

$$x_1 = \alpha + 360^\circ k$$

$$x_2 = (180^\circ - \alpha) + 360^\circ k$$

(5) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום  $k$  לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

✓ **תרגיל (2)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ואת כל הפתרונות בתחום:  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$

✓ **תרגיל (3)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

✓ **תרגיל (4)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

✓ **תרגיל (5)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin(70^\circ - 4x) = -1$

### ✓ השליבים בפתרון המשוואה $\cos(ax + b) = m$

(1) בודקים תחום הגדרה:  $-1 \leq a \leq 1$   $\cos x = a$

(2) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי  $\alpha$  שמקיים:  $\cos \alpha = a$

(3) מוצאים פתרון יסודי נוסף:  $-\alpha$

(4) מוסיפים  $360^\circ k$  לכל אחד מהפתרונות היסודיים ומקבלים את הפתרונות הכלליים:

$$x_1 = \alpha + 360^\circ k$$

$$x_2 = -\alpha + 360^\circ k$$

(5) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום  $k$  לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

#### ✓ תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos x = \frac{1}{2}$

#### ✓ תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

#### ✓ תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos 3x = 0.5$

#### ✓ תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos(50^\circ + 2x) = 1$

### ✓ השלבים בפתרון המשוואה $\tan x = m$

(1) מוצאים בעזרת מחשבון את הפתרון היסודי  $\alpha$  שמקיים:  $\tan \alpha = m$

(2) מוסיפים  $180^\circ k$  לפתרון היסודי ומקבלים את הפתרון הכללי:

$$x = \alpha + 180^\circ k$$

(3) כדי למצוא פתרונות כלליים בתחום, נציב מספר ערכים שלמים במקום  $k$  לפי התחום הנתון בשאלה.

$$k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

### ✓ תרגיל (1)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\tan x = -1$

ואת כל הפתרונות בתחום:  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

### ✓ תרגיל (2)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\tan 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

### ✓ תרגיל (3)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\tan 9x = 1$

### ✓ תרגיל (4)

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\tan(4x + 24^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

## משוואות טריגונומטריות שונות

### ✓ משוואות טריגונומטריות עם הוצאת שורש משני האגפים

#### ✓ תרגיל (1)

פתור את המשוואה ומצא פתרון כללי

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}$$

#### ✓ תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

### ✓ משוואות טריגונומטריות עם הוצאת גורם משותף

#### ✓ תרגיל (1)

פתור את המשוואה בתחום:  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$\sin^2 x - \sin x = 0$$

#### ✓ תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$2\cos^2 2x = \sqrt{3} \cos 2x$$

### ✓ משוואות טריגונומטריות בהן נקבל משוואה ריבועית

#### ✓ תרגיל (1)

פתור את המשוואה


$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

#### ✓ תרגיל (2)

פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרונות הכלליים:

$$12\cos^2 x - 13 \cos x + 3 = 0$$


 **משוואות טריגונומטריות הכוללת אותה פונקציה משני האגפים**

 **תרגיל (1)**


יש 2 דרכים לפתור את המשוואה:  $\sin x = \sin 2x$

(1) בהסתמך על הזהות  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$


(2) בהסתמך על הפתרונות של המשוואה  $\sin x = a$

 **תרגיל (2)**


מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin 3x = \sin(2x + 50^\circ)$

 **תרגיל (3)**


מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin x + \sin 5x = 0$

 **תרגיל (4)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos(5x - 40^\circ) = \cos(3x + 70^\circ)$


 **תרגיל (5)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos 3x + \cos 7x = 0$


 **תרגיל (6)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\tan 5x = \tan 2x$


 **משוואות טריגונומטריות הכוללת פונקציות שונות משני האגפים**

 **תרגיל (1)**


מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin 6x = \cos 3x$

 **תרגיל (2)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin 4x = \cos x$

 **תרגיל (3)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\cos 2x = \sin 3x$

 **תרגיל (4)**

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:  $\sin(3x + 60^\circ) = -\cos(x - 120^\circ)$

## הזזות, מתיחות או כיווץ של פונקציות טריגונומטריות

$$y = \sin x + B \checkmark$$

$y = \sin x + B$	$y = \sin x$	
$\mathbb{R} \ x$ לכול	$\mathbb{R} \ x$ לכול	<b>תחום הגדרה</b>
$B - 1 \leq y \leq B + 1$	$-1 \leq y \leq 1$	<b>תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)</b>
$2\pi$	$2\pi$	<b>מחזורות</b>
$(0, B)$	$(0, 0)$	<b>חיתוך עם הציר ה-y</b>
$x = \pi k$ חיתוך עם ציר ה-x לפי תחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל יתכן שהפונקציה לא חותכת את ציר ה-x.	$x = \pi k$	<b>חיתוך עם הציר ה-x</b>
$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$	<b>תחומי עליה</b>
$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$	<b>תחומי ירידה</b>
תלוי בתחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל. יתכן שלא חותכת את ציר ה-x	$(2\pi k, \pi + 2\pi k)$	<b>תחומי חיוביות</b>
תלוי בתחום הערכים שהפונקציה יכולה לקבל. יתכן שלא חותכת את ציר ה-x	$(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$	<b>תחומי שליליות</b>
מקסימום $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, B + 1\right)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, B - 1\right)$	מקסימום $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ מינימום $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$	<b>נקודות קיצון</b>
לא אי זוגית ולא זוגית	אי זוגית	<b>זוגיות / אי זוגיות</b>
אין	אין	<b>אסימפטוטות</b>



$$\checkmark y = \sin(ax)$$

$y = \sin(ax)$	$y = \sin x$	
מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$	מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$	תחום הגדרה
$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)
$\frac{2\pi}{ a }$	$2\pi$	מחזורות
(0,0)	(0,0)	חיתוך עם הציר ה-y
$(\frac{\pi k}{ a }, 0)$	$x = \pi k$	חיתוך עם הציר ה-x
$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ $(\frac{\pi}{ a }, \frac{\pi}{ a })$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$	תחומי עליה
$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$ $(\frac{\pi}{ a }, \frac{3\pi}{ a })$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$	תחומי ירידה
$(\frac{2\pi k}{ a }, \frac{\pi + 2\pi k}{ a })$	$(2\pi k, \pi + 2\pi k)$	תחומי חיוביות
$(-\frac{\pi + 2\pi k}{ a }, \frac{2\pi k}{ a })$	$(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$	תחומי שליליות
מקסימום $(\frac{\pi + 2\pi k}{ a }, 1)$ מינימום $(-\frac{\pi + 2\pi k}{ a }, -1)$	מקסימום $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1)$ מינימום $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1)$	נקודות קיצון
אי זוגית	אי זוגית	זוגיות / אי זוגיות
אין	אין	אסימפטוטות

$$\checkmark y = |B| \cos x$$

$y = B \cos(x)$	$y = \cos x$	
מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$	מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$	תחום הגדרה
$- B  \leq y \leq  B $	$-1 \leq y \leq 1$	תחום ערכים של הפונקציה (חסימות)
$2\pi$	$2\pi$	מחזורות
$(0, B)$	$(0, 1)$	חיתוך עם הציר ה-y
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	חיתוך עם הציר ה-x
$(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי העלייה והירידה של הפונק הפוכים לאלה של הפונ $\cos x$	$(-\pi + 2\pi k, 2\pi k)$	תחומי עליה
$(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי העלייה והירידה של הפונק הפוכים לאלה של הפונ $\cos x$	$(2\pi k, \pi + 2\pi k)$	תחומי ירידה
$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי החיוביות והשליליות של הפונק הפוכים לאלה של הפונ $\cos x$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$	תחומי חיוביות
$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$ הכפלה במינוס B גורמת לכך שתחומי החיוביות והשליליות של הפונק הפוכים לאלה של הפונ $\cos x$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$	תחומי שליליות
מקסימום $(2\pi k,  B )$ מינימום $(\pi + 2\pi k, - B )$	מקסימום $(2\pi k, 1)$ מינימום $(\pi + 2\pi k, -1)$	נקודות קיצון
זוגית	זוגית	זוגיות / אי זוגיות
אין	אין	אסימפטוטות

