תלמידים יקרים

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **וקטורים**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומרי עזר להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר.

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה !

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

המרכז לקידום אקדמי אינו אחראי לטיב הפתרונות ולטעויות במקרה שקיימות.
כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook –רוית הלפנבאום בלבד.
אין להפיץ, למכור או להעתיק חלק או את כל החוברת.
תאריך עדכון: פברואר 2019

וקטור גאומטרי

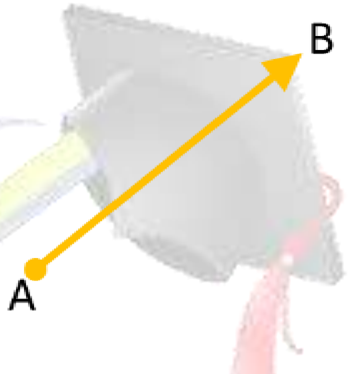
וקטור הוא קטע בעל כיוון,

זהו חץ המקשר בין שתי נקודות.

הנקודה שממנה מתחיל הווקטור נקראת המוצא – נקודת ההתחלה של הווקטור

הנקודה שבה מסתיים הווקטור נקראת הסוף של הווקטור .

בדוגמא, כאשר כותבים $\overrightarrow{AB}$, האות השמאלית (A) היא המוצא של החץ והאות הימנית (B) היא הסוף של החץ



הסימון של וקטור שתחילתו בנקודה A וסופו בנקודה B הוא: $\overrightarrow{AB}$

שים לב!

- מסמנים את הוקטור ע"י אות קטנה ומתחתיה קו. למשל: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ וכו'.
- בכתיב וקטורי, הכיוון של הוקטור מסומן באמצעות החץ, ולכן יש הבדל בין הסימון $\overrightarrow{AB}$ לסימון $\overrightarrow{BA}$.

היטל וקטור

ההיטל של וקטור על כיוון מסויים מוגדר כך:

- שרטטו קו בכיוון המבוקש שיעבור דרך ראשית הוקטור
- הורידו אנך מהוקטור לקו זה (בכחול)
- אורך הקטע הנוצר הוא ההיטל (באדום)

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

שוויון וקטורים

שני וקטורים נקראים **שווים** אם אפשר להזיז(=להעתיק) את אחד הווקטורים,

על ידי תנועה השומרת על אורך הווקטור וכיוונו כך שהוא יתלכד עם הווקטור השני.

קיימות שתי אפשרויות לתנועה השומרת על האורך והכיוון:

(1) הזזה על אותו ישר

(2) הזזה לישר מקביל

הערות

- סימון AB=CD כאשר שני קטעים שווים באורכם (לא מתייחסים לכיוון).
- כאשר גודל של וקטור שווה נסמן:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

- סימון $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ כאשר שני הקטעים שווים באורכם ובכיוונם.

אם שני וקטורים שווים זה לזה ($\underline{u} = \underline{v}$), אז הם שווים באורכם וגם בכיוונם, ולהיפך.

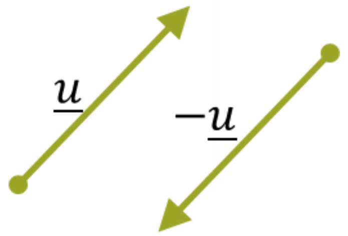
וקטורים כאלה נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים.

ווקטור נגדי

הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{BA}$ נקראים **וקטורים נגדיים** ומסמנים $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,

מכיוון שהווקטורים אינם שווי כיוון בכיוון מנוגד , אז $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

וקטור האפס

אם הנקודה A מתלכדת עם הנקודה B אז מהווקטור $\overrightarrow{AB}$ נקבל את הווקטור $\overrightarrow{AA}$.

וקטור זה נקרא וקטור האפס.

$$\overrightarrow{AA} = \underline{0}$$

וקטור שמתחיל ומסתיים באותה נקודה הוא **<u>וקטור שאורכו אפס</u>** ולא נייחס לו כיוון.

ניתן לייצגו באמצעות **<u>הנקודה A</u>**.

<u>תרגיל</u>

במשולש ABC, הנקודות D, E ו-F הן אמצעי הצלעות AB, AC ו-BC בהתאמה.

נסמן: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{FC} = \underline{v}$

א. מצא בציור ווקטורים:

(1) השווים ל - $\underline{u}$.   (2) השווים ל- $-\underline{u}$

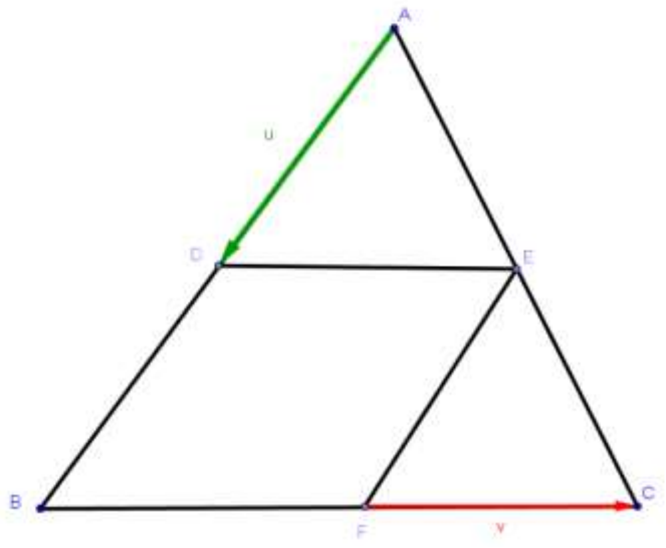
ב. מצא בציור ווקטורים:

(1) השווים ל - $\underline{v}$.   (2) השווים ל- $-\underline{v}$

ג. נתון שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB=BC).

(1) האם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שווים באורכם?

(2) האם $\underline{u} = \underline{v}$?



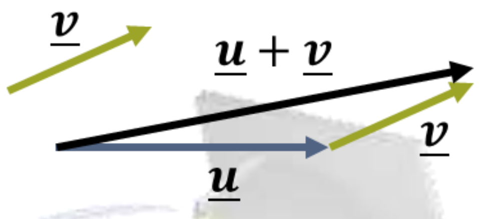
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

חיבור וקטורים: כלל המשולש (שיטת ראש זנב)

נשרטט את הווקטור $\underline{u}$,

נעתיק את הווקטור $\underline{v}$ בתנועה השומרת על אורכו וכיוונו לנקודה שבה מוצאו יתלכד עם הסוף של וקטור $\underline{u}$

הווקטור השקול המהווה את **סכום** הווקטורים הוא הווקטור שמוצאו בנקודת המוצא של $\underline{u}$ וסופו בנקודת הסוף של $\underline{v}$, הוא הווקטור $\underline{u}+\underline{v}$



ווקטור המתחיל בנקודת המוצא של ווקטור אחד ומסתיים בסופו של ווקטור שני מייצג חיבור שני ווקטורים

חיבור וקטורים: כלל המקבילית/ ההעתקה

נשרטט את הווקטור $\underline{u}$,

נעתיק את הווקטור $\underline{v}$ בתנועה השומרת על אורכו וכיוונו כך שמוצאו יתלכד עם מוצאו של הווקטור $\underline{u}$

אם שני הווקטורים מייצגים צלעות סמוכות של מקבילית, אז הווקטור שמוצאו מלכד עם המוצא של $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$ וסופו בקדקוד הנגדי של המקבילית הוא הווקטור $\underline{u}+\underline{v}$.

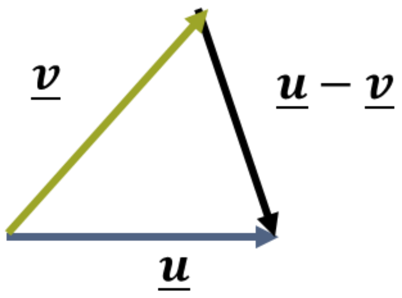
חיסור וקטורים:

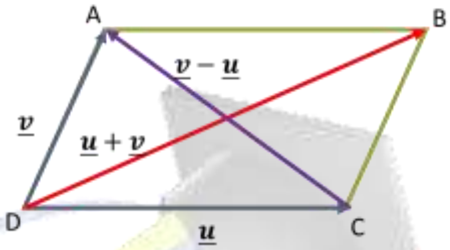
כדי למצוא את הווקטור $\underline{u}-\underline{v}$

נחבר לווקטור $\underline{u}$ את הווקטור $-\underline{v}$ שהוא הווקטור הנגדי ל- $\underline{v}$.

$$\underline{u}-\underline{v}=\underline{u}+(-\underline{v})$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il



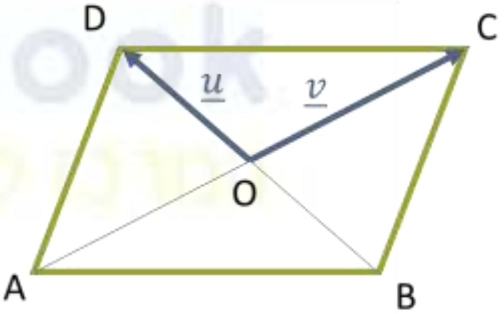


תרגיל

במקבילית שלפניך נתון: $\underline{u}=\overrightarrow{OD}$, $\underline{v}=\overrightarrow{OC}$

א. הבע את הוקטורים הבאים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{BC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הוכח: $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

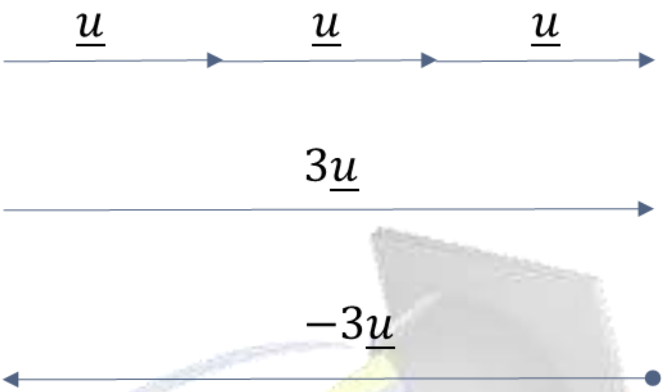


© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

סקלר

סקלר הוא מספר ממשי כלשהו (חיובי, שלילי או אפס).

הסקלר קובע את אורכו של הווקטור ויכול להפוך את כיוונו.



כפל של וקטור בסקלר

כאשר כופלים את הווקטור $\underline{u}$ (השונה מווקטור האפס) בסקלר t מתקבל הווקטור $t \cdot \underline{u}$:

כאשר t=0 הווקטור $t \cdot \underline{u} = \underline{0}$ הוא וקטור האפס

כאשר t>0 :

(1) כאשר t>1, אז הווקטור $t \cdot \underline{u}$ הוא **באותו כיוון** כמו $\underline{u}$ וארוך ממנו פי t.

(2) כאשר t=1 אז הווקטור **באותו כיוון** כמו $\underline{u}$ ושווה אורך = וקטורים שווים.

(3) כאשר 0<t<1 אז הוקטור $t \cdot \underline{u}$ הוא **באותו כיוון** כמו וקטור $\underline{u}$ וקצר ממנו פי t.

כאשר t<0 :

(1) כאשר אם t<-1, אז הווקטור $t \cdot \underline{u}$ הוא **בכיוון מנוגד** לכיוון $\underline{u}$ וגדול ממנו פי t.

(2) כאשר t=-1 אז הווקטור הוא **בכיוון מנוגד** לכיוון $\underline{u}$ ושווה אורך = זהו הוקטור הנגדי.

(3) כאשר -1<t<0 אז הוקטור הוא **בכיוון מנוגד** לכיוון $\underline{u}$ וקצר ממנו פי t.

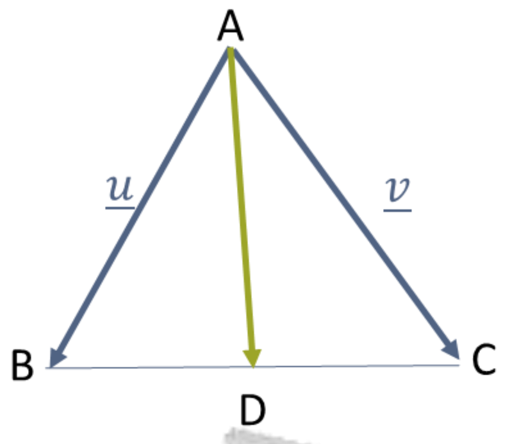
תרגיל

במשולש ABC נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$,

נתון $\overrightarrow{AD}$ הוא תיכון לצלע BC.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

הבע את וקטור התיכון באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.



תרגיל

במקבילית ABCD נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ ו- $\underline{v} = \overrightarrow{BC}$.

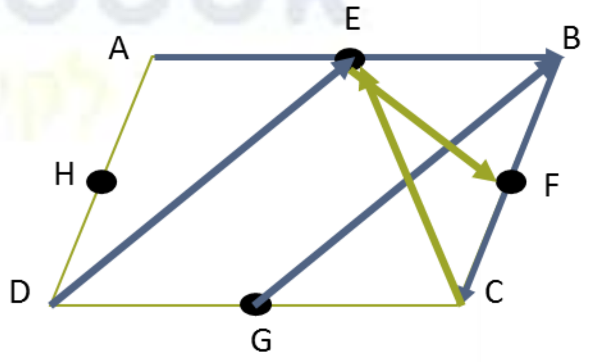
הנקודות E,F,G,H הן אמצעי הצלעות AB,BC,CD,AD בהתאמה.

(א) הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים הבאים:

(1) $\overrightarrow{CE}$ (2) $\overrightarrow{EF}$

(ב) הוכח: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GB}$

(ג) האם מההוכחה בסעיף ב' נובע שהמרובע DEBG הוא מקבילית?



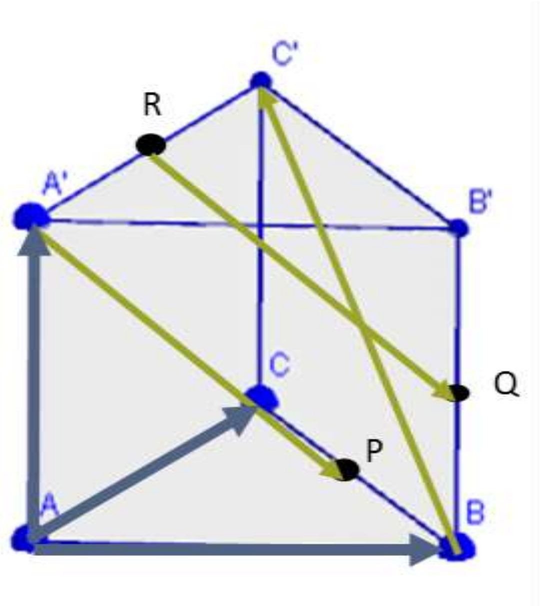
תרגיל

במנסרה משולשת וישרה ABCA’B’C’ נתון: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$, $\underline{w} = \overrightarrow{A'A}$.

הנקודות P’Q’R הן נקודות האמצע של המקצועות BC,BB’,A’C’ בהתאמה.

הבע את הוקטורים $\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{A'P}, \overrightarrow{BC'}$באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il



© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

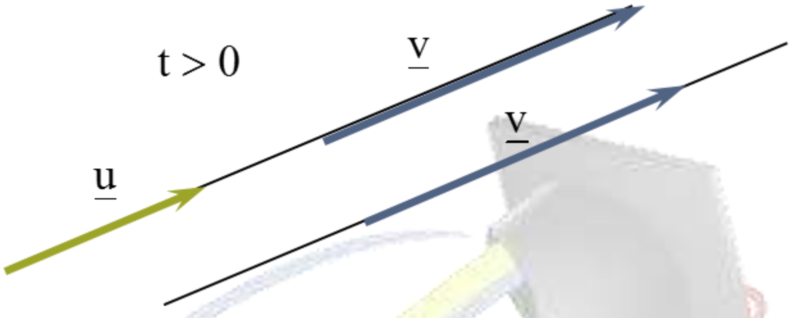
תלות ליניארית בין שני וקטורים

כאשר $\overrightarrow{CD} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \neq 0$,

הווקטורים $\overrightarrow{CD}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ תלויים ליניארית,

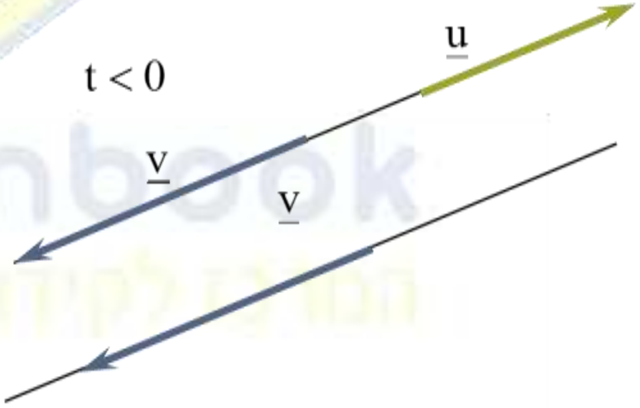
כיוון שהווקטור $\overrightarrow{CD}$ מתקבל מכפל בסקלר של הווקטור $\overrightarrow{AB}$.

שני וקטורים $\overrightarrow{CD}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים



שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם (שונים מ- $\underline{0}$) נמצאים על אותו ישר או על ישרים מקבילים

אם ורק אם קיים מספר אחד ויחיד t כך ש- $\underline{v} = t \cdot \underline{u}$.



© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

<u>הווקטור הגיאומטרי – תיאור של ישר</u>

נקודה C נמצאת על הישר AB **אם ורק אם** קיים מספר ממשי אחד ויחיד שבשבילו

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

כאשר נתון $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, מיקומה של הנקודה C ביחס לקטע AB נקבע בהתאם לערך של t:

1. אם t>1, אז הנקודה C נמצאת מחוץ לקטע AB. (מהצד של B)
2. אם t=1, אז הנקודה C מתלכדת עם הנקודה B.
3. אם 0<t<1, אז הנקודה C נמצאת על הקטע AB.
4. אם t=0, אז הנקודה C מתלכדת עם הנקודה A.
5. אם t<0, אז הנקודה C נמצאת מחוץ לקטע AB (מהצד של A)

<u>תרגיל</u>

נתונים הווקטורים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = -1\frac{1}{4}\underline{u}$.

א. הסבר מדוע הנקודות A, B , C ו-D נמצאות על אותו ישר

ב. מהו סדר הנקודות הנ"ל על הישר שעליו הן נמצאות.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

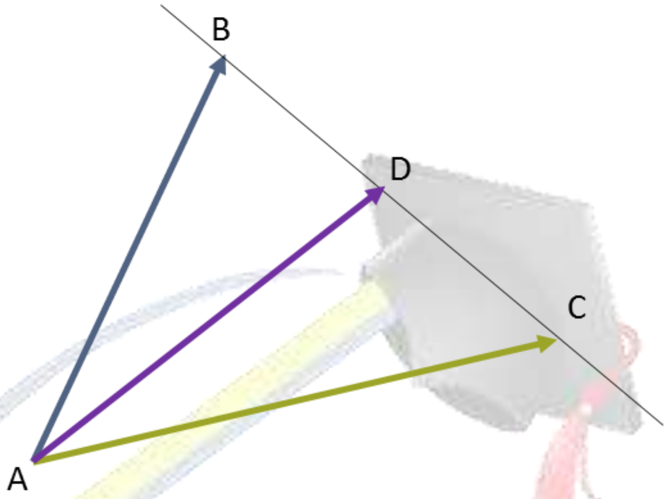
וקטורים שמוצאם באותה נקודה וסופם על אותו ישר

אם שלושה וקטורים $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ו-$\overrightarrow{AC}$ בעלי מוצא משותף A,

אז הנקודה D נמצאת על הישר BC

אם ורק אם קיים t שעבורו מתקיים:

$$\overrightarrow{AD} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$



תרגיל

במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$. הנקודות D ו- E מקיימות:

$\overrightarrow{AE} = 1\frac{1}{4}\underline{u} - \frac{1}{4}\underline{v}$,$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{2}{5}\underline{v}$.

א. האם הנקודה D נמצאת על הישר BC? אם כן, קבע את מיקומה ביחס לקטע BC.

ב. האם הנקודה E נמצאת על הישר BC? אם כן, קבע את מיקומה ביחס לקטע BC.

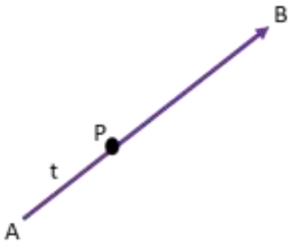
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

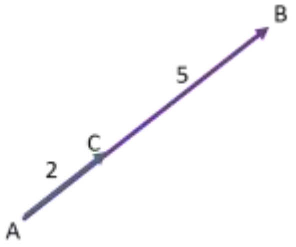
חלוקת קטע ביחס נתון

כאשר הנקודה P נמצאת על הקטע AB מתקיים:

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PB} = (1-t)\overrightarrow{AB}$$





$$AC:CB = \frac{2}{7}:\frac{5}{7}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

מכפלה סקלרית – הווקטור הגיאומטרי

זווית בין שני וקטורים

מסמנים את הזווית שבין שני ווקטורים שמוצאם באותה נקודה כך:

$$\alpha = \sphericalangle(\underline{u};\underline{v})$$

המכפלה הסקלרית

$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|cos\alpha$, למספר $\underline{u}\cdot\underline{v}$ קוראים המכפלה הסקלרית של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

המכפלה הסקלרית של שני ווקטורים הניצבים זה לזה שווה לאפס

האורך של וקטור

מסמנים אורך של ווקטור כך: $|\underline{u}|$

ניתן לחשב אורך של וקטור כך: $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$

כדי לחשב את האורך של וקטור צריך לחשב את המכפלה הסקלרית של הווקטור בווקטור עצמו ולהוציא שורש ריבועי

שימו לב!

הביטוי $\sqrt{\underline{u}^2}$ מייצג מכפלה סקלרית הנקודה מסמנת פעולה בין שני וקטורים ולא כפל בין שני מספרים, ולכן אסור לצמצם את החזקה עם השורש או לפרק אותו כמכפלה.

תרגיל

בטטראדר ABCD נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

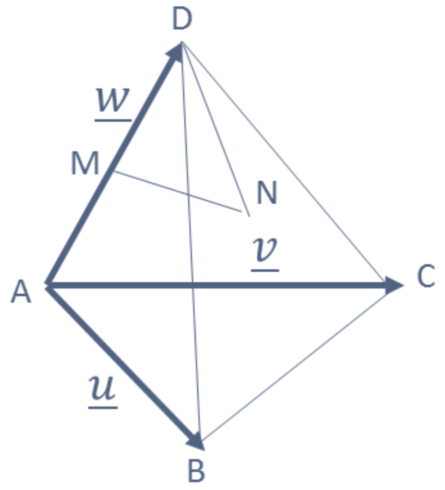
הנקודה N מקיימת: $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, הנקודה M מקיימת: $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

א. הסבר מדוע הנקודה N נמצאת במישור BDC.

ב. הבע את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

ג. הוכח: $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABC

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il



תרגיל

במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

הנקודות D,E, F ו- G מקיימות:

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\underline{u} + \frac{3}{5}\underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\underline{u} + \frac{5}{4}\underline{v}$.

קבע לגבי כל אחת מהנקודות הנ"ל אם היא:

(1) בתוך המשולש (2) מחוץ למשולש. (3) על אחת מצלעות המשולש (4) על המשך אחת מצלעות המשולש

תרגיל

אורכי הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם: $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = 4$.

חשב את הזווית בין שני הוקטורים, אם נתון: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 10$

תרגיל

אורכי הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם: $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = 5$.

חשב את הזווית בין שני הוקטורים, אם נתון: $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4$

תרגיל

הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מאונכים זה לזה ומקיימים: $|\underline{u}| = 5$, $|\underline{v}| = 4$.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

חשב את אורך הוקטור $3\underline{u}-2\underline{v}$

תרגיל

אורך הוקטור $\underline{v}$ הוא 3 והוא ניצב לווקטור - $3\underline{u}-2\underline{v}$ שאורכו $3\sqrt{2}$.

חשב את הזווית שבין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$

תרגיל

הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מקיימים: $|\underline{u}|=5$, $|\underline{v}|=4$. הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ היא בת $60°$.

מצא את הזווית בין הווקטור $\underline{u}+\underline{v}$ לווקטור $3\underline{u}-2\underline{v}$

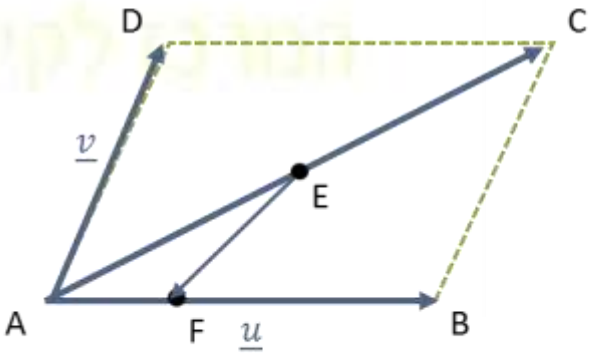
תרגיל

במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $|\underline{u}|=5$, $|\underline{v}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=7$.

א. חשב את $\underline{v}\cdot\underline{u}$.

ב. חשב את הזווית BAD.

ג. הנקודה E היא אמצע הקטע AC, הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. חשב את הזווית בין הווקטורים $\overrightarrow{FE}$ ו- $\overrightarrow{AD}$



תרגיל

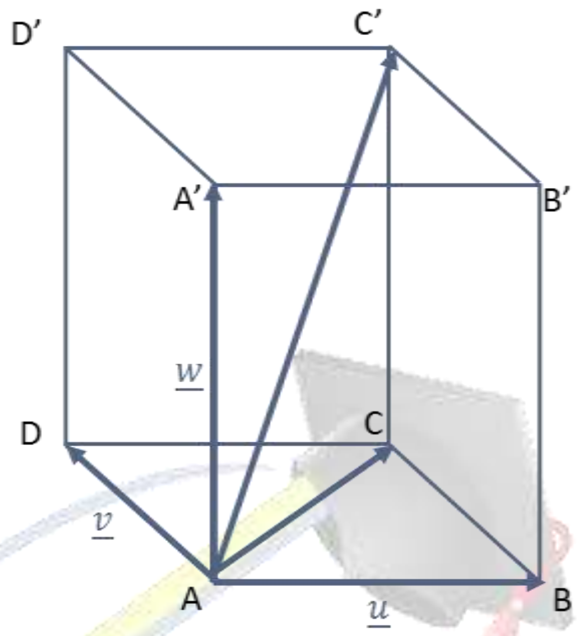
בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=3$, $|\underline{w}|=$
.6

א. הבע את $\overrightarrow{AC'}$ ואת $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

ב. חשב את $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ ו- $\left|\overrightarrow{AC'}\right|$.

ב. חשב את הזווית CAC’



תרגיל

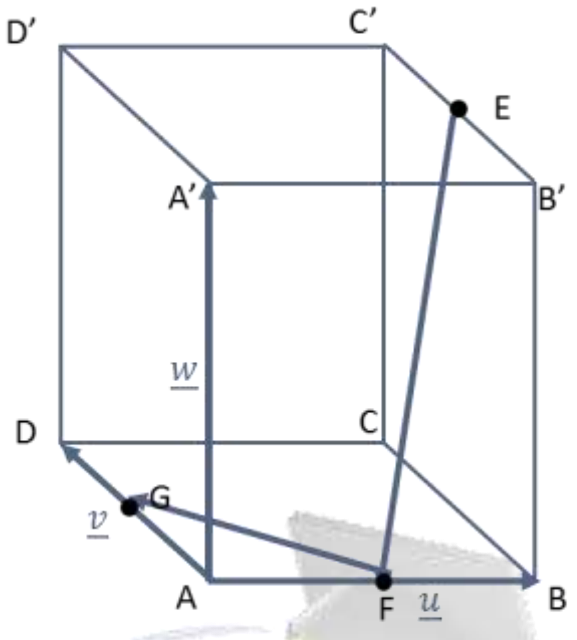
בקוביה ABCDA’B’C’D’ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, הנקודות E , F ו- G הן אמצעי המקצועות שלה קובייה.

א. הבע את $\overrightarrow{EF}$ ואת $\overrightarrow{FG}$ באמצעות $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$.

ב. חשב את הזווית בין $\overrightarrow{EF}$ ל- $\overrightarrow{FG}$

ג. נתון $\sqrt{3} = \left|\overrightarrow{EF}\right|$ חשב את אורך מקצוע הקובייה.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il



© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

הדרכים לקביעת מישור במרחב

תיאור של מישור – הווקטור הגיאומטרי

שני ווקטורים בעלי מוצא משותף שאינם על ישר אחד קובעים מישור אחד ויחיד.

כל וקטור במישור הוא קומבינציה(צירוף) לינארית של הווקטורים הפורשים אותו.

למעשה, מכאן נובע שנקודה כלשהי במרחב תימצא על מישור ABC אם ניתן להגיע אליה באמצעות קומבינציה לינארית של $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

תיאור של מישור – הווקטור הגיאומטרי

הנקודה P נמצאת על המישור ABC אם ניתן להגיע אליה כך:

$$\overrightarrow{AP} = s \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}$$

הוקטור $\overrightarrow{AP}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ אם הוא ניתן להבעה בצורה:

$$\overrightarrow{AP} = s \cdot \underline{u} + t \cdot \underline{v}$$

כאשר t ו-s הם סקלרים

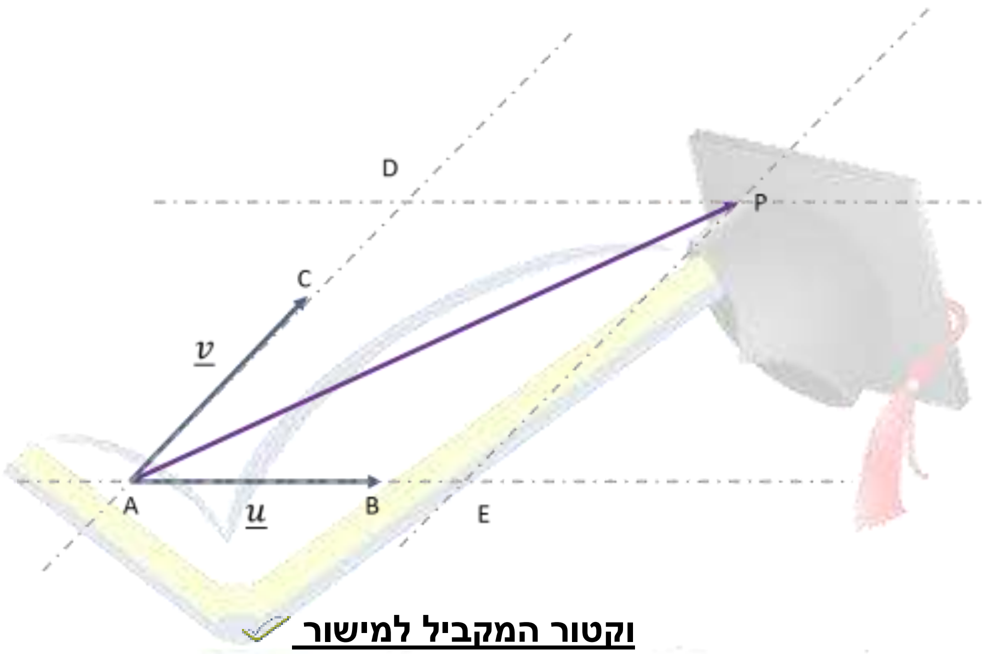
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

שימו לב: ניתן להגיע לכל נקודה על המישור על ידי הכפלת שני הווקטורים הפורשים את המישור בסקלרים מתאימים.

<u>משפט:</u>

תהיינה C,B,A שלוש נקודות שאינן על ישר אחד. נקודה P נמצאת במישור ABC אם ורק אם קיימים סקלרים t ו –s עבורם:

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$$



<u>וקטור המקביל למישור</u>

וקטור מקביל למישור כאשר הוא ניתן להצגה באמצעות שני הווקטורים הפורשים את המישור <u>בלבד</u> , והוא יוצא מנקודה <u>שאינה</u> נמצאת על המישור

<u>תרגיל</u>

נתון הווקטור: $\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \left(t - \frac{1}{4}\right)\underline{w}$

מצא עבור איזה ערך של t, הווקטור מקביל למישור הנפרש על ידי שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

הווקטור: $\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \left(t - \frac{1}{4}\right)\underline{w}$

מקביל למישור זה, כאשר הוא ניתן להצגה באמצעות שני הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בלבד

כלומר ללא הווקטור $\underline{w}$, מכאן – הסקלר המקדם של הווקטור $\underline{w}$ = 0

$$t - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4}$$

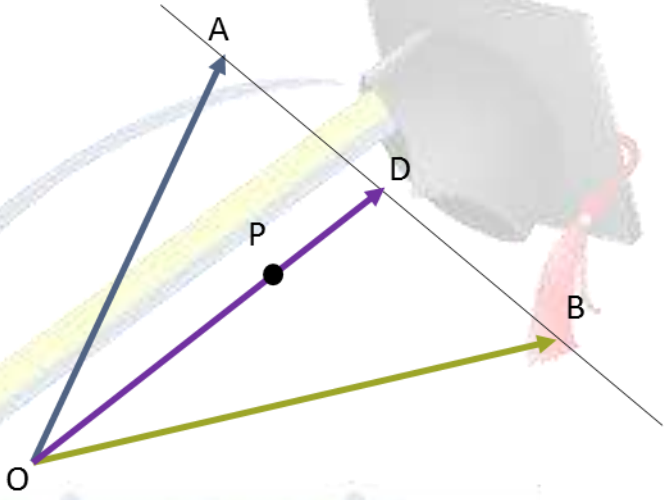
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

התנאי שהנקודה נמצאת בתוך המשולש (קביעת מיקומה של הנקודה במשולש)

נקודה P מצאת בתוך המשולש OAB אמ"מ ניתן להציג את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ בצורה: $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ כך ש: a>0, b>0, ו- a+b<1

הערות:

1. אם a+b=1 אז הנקודה P נמצאת על הצלע AB.
2. אם a=0 אז P נמצאת על הצלע OB.
3. אם b=0 אז P נמצאת על הצלע OA



וקטורים שמוצאם בנקודה אחת וסופיהם על מישור

כדי ליצור מישור אנו זקוקים לשלוש נקודות ולכן כדי ליצור מישור עם וקטורים אנו זקוקים לשלושה וקטורים בעלי מוצא משותף (למעשה שלושה וקטורים יוצרים על המישור שני וקטורים שהם שפורשים את כל המישור.

משפט: יהיו $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ ארבעה וקטורים בעלי מוצא משותף O כך שהנקודות A , B ו- C שלוש נקודות שאינן על ישר אחד. הנקודה P נמצאת במישור ABC אם"ם ניתן להציג את הווקטור $\overrightarrow{OP}$ בצורה:

$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ כך ש: a+b+c=1

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

וקטור אלגברי

ייצוג נקודה במרחב במערכת צירים תלת מימדית

תרגיל

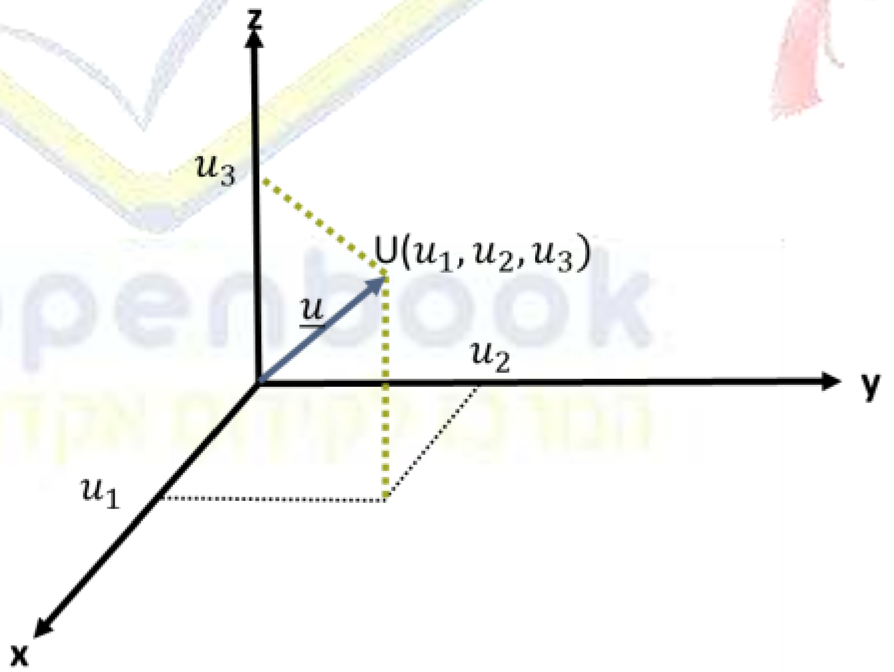
קבע אילו מהנקודות הבאות נמצאות על ציר: ה-x, ה-y, ה-z.

קבע אילו מבין הנקודות שאינן על הצירים נמצאות במישור [x,y], [x,z], [yz]

(3,0,0) , (-6,0,2) , (0,0,3) , (2,0,2) , (5,1,0) , (0,4,0) , (0,2,-4)

ההצגה האלגברית של וקטור שמוצאם בראשית הצירים

השלשה (u_1,u_2,u_3) היא הצגה אלגברית של הווקטור $\overrightarrow{OU}$ כאשר הנקודה O(0,0,0) היא ראשית הצירים והנקודה U היא $U(u_1,u_2,u_3)$



שוויון וקטורים בהצגה אלגברית שמוצאם בראשית הצירים

שני וקטורים $\underline{u} = \overrightarrow{OU} = (u_1,u_2,u_3)$ ו- $\underline{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1,v_2,v_3)$

שווים זה לזה אם ורק אם

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ ו- $u_3 = v_3$.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

שני וקטורים הם שווים אם ורק אם כל הקואורדינטות שלהם שוות זו לזו בהתאמה.

תרגיל

מצא בתרגילים הבאים את x,y,z אם נתון ש - $\underline{u} = \underline{v}$

$$\underline{u} = (3,-2,5)$$

$$\underline{v} = (x-3, y+2, z-3)$$

תרגיל

מצא לאילו ערכי k הוקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ שווים זה לזה

$$\underline{v} = (2, k+7)$$

$$\underline{u} = (2,1-2k)$$

תרגיל

מצא לאילו ערכי k הוקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ שווים זה לזה

$$\underline{v} = (k, k^2, 2)$$

$$\underline{u} = (-3,9,k)$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

חיבור וקטורים בהצגה אלגברית שמוצאם בראשית הצירים

הסכום של הווקטורים

$\underline{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2, v_3)$ ו- $\underline{u} = \overrightarrow{OU} = (u_1, u_2, u_3)$

הוא הווקטור:

$$\underline{u} + \underline{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

כדי לחבר שני וקטורים בהצגה אלגברית יש לחבר את הקואורדינטות שלהם זו לזו.

תרגיל

נתונים הוקטורים: $\underline{v} = (-1,3,4)$, $\underline{u} = (2,-1,5)$ חשב:

א. $\underline{u} + \underline{v}$, ב. $\underline{u} - \underline{v}$, ג. $\underline{v} - \underline{u}$

תרגיל

הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ מקיימים: $\underline{u} + \underline{v} = (3,-2,-1)$, $\underline{v} - \underline{u} = (1,4,-9)$

מצא את $\underline{u}, \underline{v}$

תרגיל

הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ מקיימים:

$\underline{u} = (2,0,4)$, $\underline{v} = (0,-1,2)$, $\underline{w} = (3,-1,0)$ ו- $\underline{r} = (1,-3,0)$

מצא מספרים a,b,c עבורם מתקיים: $a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w} = \underline{r}$

תרגיל

נתונים שני וקטורים שמוצאם בראשית. קבע אילו מהווקטורים נמצאים על אותו ישר.

$\underline{u} = (4,-1,2)$, $\underline{v} = (-4,1,-2)$

$\underline{w} = (1,4,0)$, $\underline{r} = (-4,-16,-4)$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

כפל בסקלר של וקטור אלגברי

הכפל של הווקטורים $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ בסקלר t הוא הוקטור:

$$t \cdot \underline{u} = t \cdot (u_1, u_2, u_3) = (tu_1, tu_2, tu_3)$$

כדי לכפול וקטור הנתון בהצגה אלגברית בסקלר יש לכפול את כל אחת מהקואורדינטות שלו בסקלר.

תרגיל

חשב את הוקטורים הבאים: $2\underline{v} - 3\underline{u}$, $-\frac{1}{2}\underline{v}$, $4\underline{v}$

$\underline{u} = (4, -1,2)$, $\underline{v} = (-4,1, -2)$

תרגיל

הוקטורים:

$\underline{u} = (4, t, -18)$ ו- $\underline{v} = (t + 5, -1,2t)$ מקיימים: $\underline{v} = k\underline{u}$

מצא את הערך של k

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

<u>ההצגה האלגברית של וקטור שמוצאו לא בראשית הצירים</u>

אם $A(a_1,a_2,a_3)$ ו- $B(b_1,b_2,b_3)$ הם שתי נקודות במרחב אז

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$$

כדי למצוא את ההצגה האלגברית של וקטור מחסרים את שיעורי נקודת המוצא שלו משיעורי נקודת הסוף שלו.

<u>תרגיל</u>

מצא את הוקטור $\overrightarrow{AB}$:

A(2,1) , B(7,8)

A(-1,-4,-8) , B(7,-3,-9)

<u>תרגיל</u>

נתונים שיעורי נקודה A ואת הווקטור $\overrightarrow{AB}$ מצא את הנקודה B:

A(2,1) , $\overrightarrow{AB}=(3,2)$

A(-1,-4,-8) , $\overrightarrow{AB}=(6,8,2)$

<u>תרגיל</u>

נקודה A נמצאת על ציר ה-x ונקודה B נמצאת על מישור [yz] .

נתון: $\overrightarrow{AB}=(3,1,-7)$

מצא את שיעורי הנקודה A ו- B.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

וקטורי הצירים

המרחב נקבע על ידי שלושה וקטורים בלתי תלויים

הוקטורים הבלתי תלויים נקראים וקטורי הבסיס של המרחב

נגדיר שלושה וקטורים:

$\underline{i}$ – וקטור באורך יחידה היוצא מראשית הצירים בכיוון ציר ה-x. $\underline{i} = \underline{e}_x = (1,0,0)$

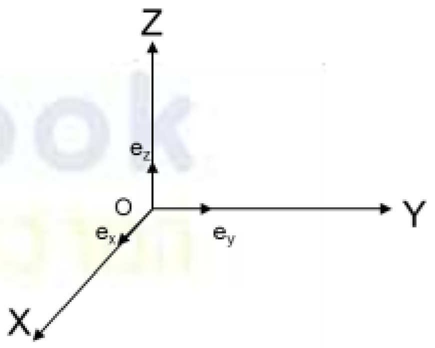
$\underline{j}$ - וקטור באורך יחידה היוצא מראשית הצירים בכיוון ציר ה- y. $\underline{j} = \underline{e}_y = (0,1,0)$

$\underline{k}$ - וקטור באורך יחידה היוצא מראשית הצירים בכיוון ציר ה- z. $\underline{k} = \underline{e}_z = (0,0,1)$

אם $P(x,y,z)$ היא נקודה כלשהי במרחב, אז הווקטור $\overrightarrow{OP}$

מתואר בעזרת וקטורי היחידה $\underline{k}$, $\underline{j}$, $\underline{i}$ על-ידי: $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

נכתוב גם $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$



© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

אמצע של קטע

קטע שקצותיו הן הנקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$ והנקודה M היא אמצע הקטע AB, מתקיים:

$$X_M = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$Y_M = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$$Z_M = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

<u>תרגיל</u>

במשולש ABC, הנקודות D, E ו- F הם אמצעי הצלעות AB, AC ו- BC, בהתאמה.

נתון: A(6,-2,-8) , D(7.5,-5.-4) , $\overrightarrow{BC} = (-7,7,2)$

א. רשום את ההצגה האלגברית של הווקטור $\overrightarrow{DE}$.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

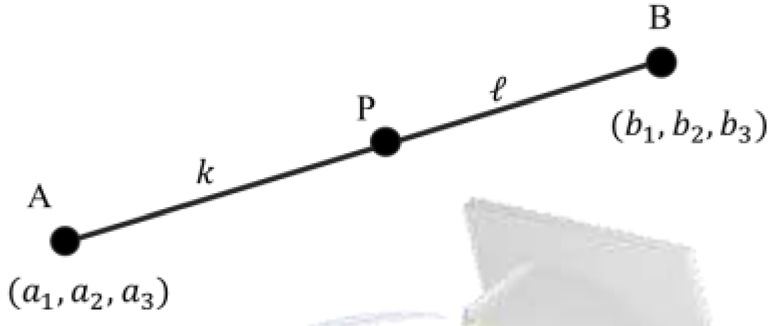
ג. הוכח: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FD}$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

חלוקת קטע ביחס נתון

$\frac{AP}{PB}=\frac{k}{\ell}$,

$$\left(\frac{k\cdot b_1+\ell\cdot a_1}{k+\ell},\frac{k\cdot b_2+\ell\cdot a_2}{k+\ell},\frac{k\cdot b_3+\ell\cdot a_3}{k+\ell}\right)$$



נקודת מפגש תיכונים.

נקודת המפגש של התיכונים מחלקת כל תיכון לשני קטעים,

הקטע הקרוב קדקוד גדול פי 2 מהקטע הקרוב לצלע. יחס החלוקה 2:1.

נקודת מפגש התיכונים היא מרכז הכובד במשולש.

$$x_m=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$

$$y_m=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

$$z_m=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

המרחק של ווקטור בצורה אלגברית

$$|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u_1}^2+\underline{u_2}^2+\underline{u_3}^2}$$

המרחק בין שתי נקודות

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b1-a1)^2+(b2-a2)^2+(b3-a3)^2}$$

המכפלה הסקלרית בהצגה אלגברית

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u1 \cdot v1 + u2 \cdot v2 + u3 \cdot v3$$

<u>חישוב שטח משולש</u>

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\underline{u}^2 \cdot \underline{v}^2 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2}$$

<u>וקטור היחידה</u>

וקטור יחידה הוא וקטור שאורכו יחידה אחת.

כאשר מחלקים וקטור $\underline{u}$ באורך שלו $|\underline{u}|$ מקבלים וקטור שאורכו יחידה אחת, כלומר מקבלים וקטור יחידה.

<u>הצגה אלגברית של וקטורים היוצאים מראשית הצירים</u>

ההצגה האלגברית של וקטור היוצא מראשית הצירים לנקודה P(x,y,z):

$$\overrightarrow{OP} = x\underline{\imath} + y\underline{\jmath} + z\underline{k} = (x, y, z)$$

הצגה אלגברית של חיבור וקטורים היוצאים מראשית הצירים:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = (x_P + x_A\ ,\ y_P + y_A\ ,\ z_P + z_A)$$

הצגה אלגברית של וקטור נגדי: $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP} = (-x, -y, -z)$

הצגה אלגברית של חיבור וקטורים היוצאים מראשית הצירים:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x_P - x_A\ ,\ y_P - y_A\ ,\ z_P - z_A)$$

<u>הצגה אלגברית של סכום וקטורים גם כאשר לא יוצאים מראשית הצירים</u>

החיבור של וקטורים לא תלוי בנקודה ממנה יוצאים הווקטורים.

אם נרצה לחבר זוג של וקטורים(גם אם הם לא יוצאים מראשית הצירים) $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$

ו- $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$

הסכום יהיה:

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

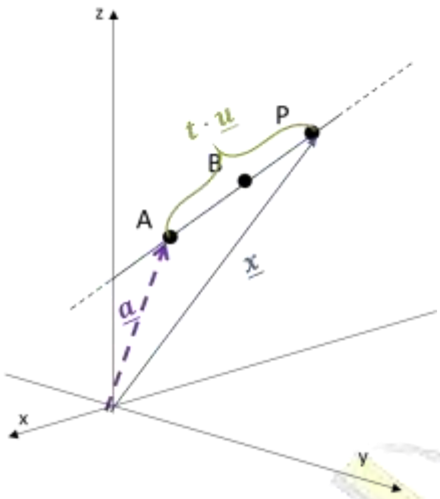
מכפלה סקלרית

למדנו כי המכפלה הסקלרית בין שני וקטורים היא $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos\alpha$

נחשב את המכפלה הסקלרית כאשר הוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ נתונים בהצגה האלגברית שלהם:

$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$,$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

הצגה פרמטרית של ישר במישור



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

נסמן: $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OP} = \underline{x}$ אותו אני רוצה למצוא

נציב ונקבל: $\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u}$

וקטור שעל הישר הנקרא וקטור כיוון של הישר

פרמטר של ההצגה

וקטור שמוצאו בראשית וסופו בנקודה כלשהי שעל הישר

הצירים כהצגה של ישר

ציר ה-x:

$$\ell_x \ : \ \underline{x} = (0,0,0) + t(1,0,0)$$

ציר ה-y:

$$\ell_y \ : \ \underline{x} = (0,0,0) + s(0,1,0)$$

ציר ה- z:

$$\ell_z \ : \ \underline{x} = (0,0,0) + p(0,0,1)$$

תרגיל

נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x} = (1,4,2) + t(3,-2,-1)$

א. מצא את הנקודות שעל הישר המתקבלות עבור: t=0 , t=1 ,t=2

ב. האם הנקודה (10,-2,-1) נמצאת על הישר?

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

ג. האם הנקודה (4,2,8) נמצאת על הישר?

ד. מצא נקודת חיתוך של הישר ℓ עם ציר ה-x.

תרגיל

מצא הצגה פרמטרית של ישר במישור העובר דרך הנקודות A(-1,4) B(2,5)

תרגיל

נתונות שתי הצגות פרמטריות של ישר במרחב. הראה שהן מתארות את אותו ישר.

$\ell: \underline{x} = (1,0,2) + t(1,-1,0)$, $\ell: \underline{x} = (0,1,2) + s(2,-2,0)$

תרגיל

ממשוואת ישר במישור להצגה פרמטרית שלו ולהיפך.

מצא במישור הצגה פרמטרית של הישר שמשוואתו היא: 2x-3x+6=0

תרגיל

נתון הישר : $\ell: \underline{x} = (-2,3,5) + t(1,2,3)$

האם הנקודות K(0,7,11) , M(-4,-1,3) נמצאות על הישר?

תרגיל

נתון הישר : $\ell: \underline{x} = (-2,3,5) + t(1,2,3)$

בתרגיל הקודם ראנו שהנקודה (3 , 1- , 4-) Mלא על הישר ℓ

מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ_1 העובר דרך נקודה Mומקביל לישר ℓ

תרגיל

נתון הישר : $\ell: \underline{x} = (-2,3,5) + t(1,2,3)$

בתרגיל הקודם ראנו שהנקודה K(0,7,11) נמצאת על הישר ℓ.

מצאו את ההצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 העובר דרך נקודה K ומאונך לישר ℓ.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

האם הישר ℓ_2 הוא ישר יחיד ? אם כן הסבירו מדוע ואם לא תנו דוגמא לעוד ישר המאונך לישר ℓ

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

<u>מצבם ההדדי של שני ישרים במרחב</u>

(1) הישרים **נחתכים** – יש להם נקודה אחת משותפת וישנו מישור המכיל אותם

(2) הישרים **מתלכדים** לישר אחד – יש להם אינסוף נקודות משותפות.

(3) הישרים **מקבילים** – אין להם אף נקודה משותפת וישנו מישור המכיל אותם.

(4) הישרים **מצטלבים** – אין להם אף נקודה משותפת ואין מישור המכיל אותם.

וקטורי כיוון תלויים ליניארית? / קיימת נקודה משותפת על שני הישרים?	כן	לא
כן	**מתלכדים**	**נחתכים**
לא	**מקבילים**	**מצטלבים**

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

קביעת המצב ההדדי בין שני ישרים
דרך א'

בוקטורים – מה אנחנו יודעים על וקטורים מקבילים או מתלכדים?

וקטורים מקבילים/מתלכדים ניתן להציג אחד מהם ככפולה של האחר בקבוע

לכן, איך נבדוק אם וקטורים מקבילים/מתלכדים?

נבדוק האם וקטורי הכיוון תלויים ליניארית זה בזה.

ואם הם תלויים ליניארית, איך נבדוק האם הם מקבילים או מתלכדים?

נבחר נקודה כלשהי A על ישר 1 ונבדוק האם היא נמצאת על הישר השני.

אם היא נמצאת אז הם מתלכדים

אם היא לא נמצאת אז הם מקבילים

קביעת המצב ההדדי בין שני ישרים
דרך א'

איך נבדוק האם וקטורים נחתכים או מצטלבים?

אם וקטורי הכיוון אינם תלויים ליניארית זה בזה.

אם הם בלתי תלויים ליניארית, איך נבדוק האם הם נחתכים או מצטלבים?

נבדוק אם לשני הישרים יש נקודה משותפת.

אם יש נקודה משותפת הם נחתכים

אם אין נקודה משותפת הם מצטלבים

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

נסתכל על וקטורי הכיוון של הישרים.

אם וקטורי הכיוון תלויים ליניארית זה בזה (אחד מהם הוא כפולה של האחר בקבוע)

הישרים מקבילים או מתלכדים.
נבחר נקודה כלשהי A על הישר ℓ_1
ונבדוק אם היא נמצאת על הישר ℓ_2

- הנקודה A נמצאת גם על הישר ℓ_2 ← הישרים מתלכדים
- הנקודה A לא נמצאת גם על הישר ℓ_2 ← הישרים מקבילים

אם וקטורי הכיוון אינם תלויים ליניארית זה בזה

הישרים נחתכים או מצטלבים.
במצב זה נבדוק אם לשני הישרים יש נקודה משותפת

- יש נקודה משותפת ← הישרים נחתכים
- אין נקודה משותפת ← הישרים מצטלבים

$\ell_1: \underline{x} = \underline{a}_1 + t \cdot \underline{u}_1$ $\qquad$ $\ell_2: \underline{x} = \underline{a}_2 + s \cdot \underline{u}_2$

כדי לקבוע את המצבים ההדדיים , נשווה את הצגותיהם הפרמטריות של הישרים.

$$\underline{a}_1 + t \cdot \underline{u}_1 = \underline{a}_2 + s \cdot \underline{u}_2$$

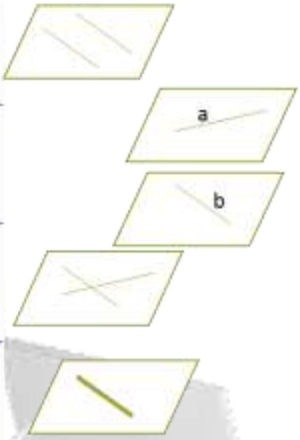
נקבל שלוש משוואות עם שני נעלמים t ו- s.
יתכנו המקרים הבאים: אם לשלוש המשוואות:

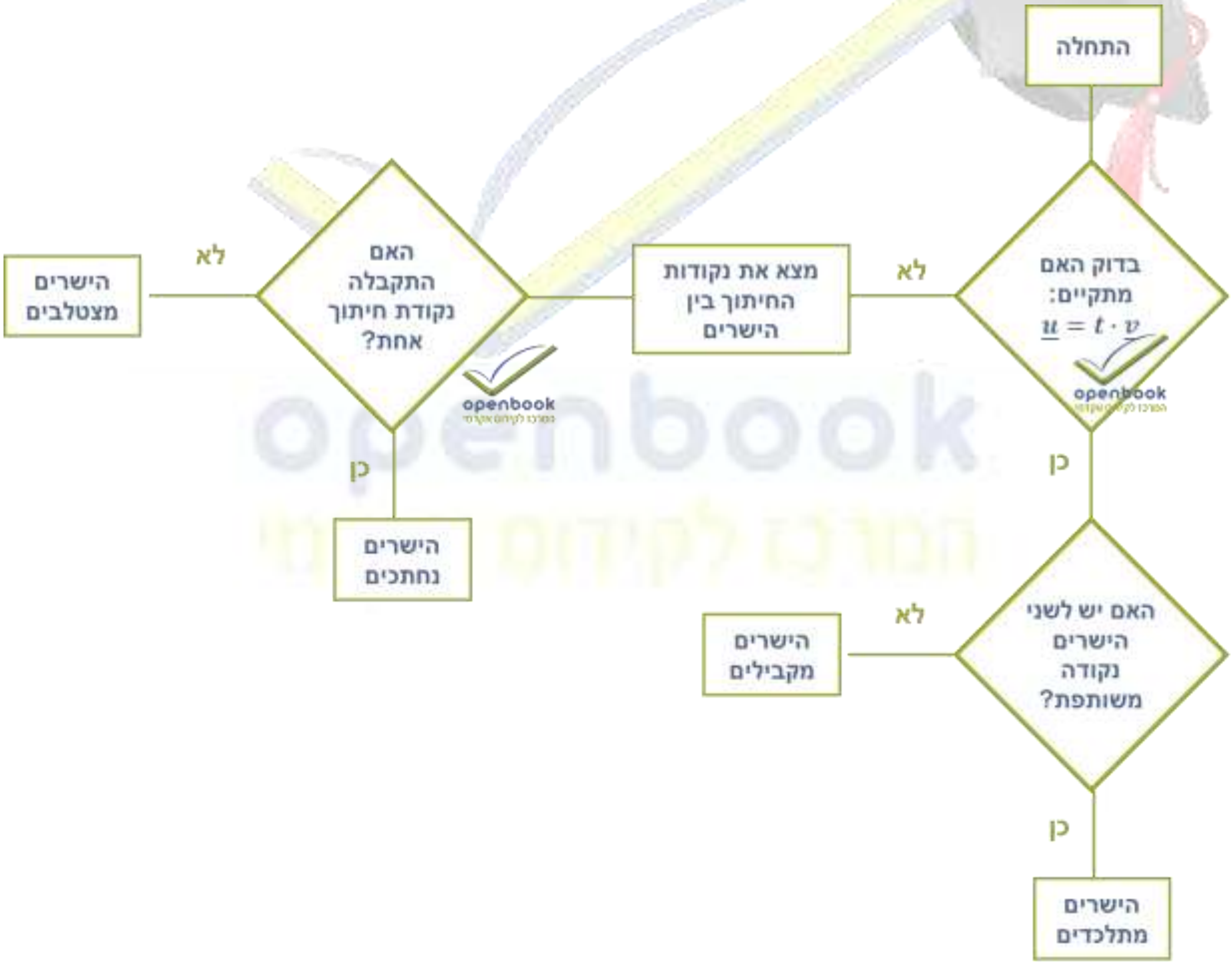
- יש פתרון יחיד ← הישרים נחתכים
- אין פתרון ← הישרים מקבילים או מצטלבים.
כדי לקבוע איזה אפשרות מתקיימת צריך לבדוק את וקטורי הכיוון שלהם.
  - אם קיים k עבורו: $\underline{u}_2 = k \cdot \underline{u}_1$ ← הישרים מקבילים
  - אם לא קיים k עבורו: $\underline{u}_2 = k \cdot \underline{u}_1$ ← הישרים מצטלבים
- אינסוף פתרונות ∞ ← הישרים מתלכדים.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

<u>מצב הדדי בין ישרים – סיכום</u>

	נקודות חיתוך	זווית בין ישרים	וקטורי הכיוון
מקבילים	אין	0°	$\underline{u} = t\cdot\underline{v}$
מצטלבים	אין	$\neq 0^\circ$	$\underline{u} \neq t\cdot\underline{v}$
נחתכים	אחת	$\neq 0^\circ$	$\underline{u} \neq t\cdot\underline{v}$
מתלכדים	∞	0°	$\underline{u} = t\cdot\underline{v}$



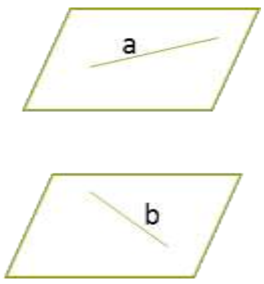


© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

ישרים מצטלבים

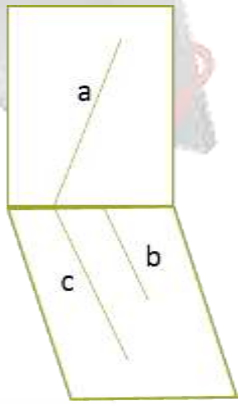
הישרים אינם נמצאים באותו מישור ואין להם נקודה משותפת.

לדוגמה:



a- ו b ישרים מצטלבים

הישרים במישורים שונים ואין להם נקודה משותפת



a- ו b ישרים מצטלבים

a ו- c אינם מצטלבים,

כי הם נמצאים במישור אחד הכולל את הישרים a ו- c.

תרגיל

בשרטוט משמאל מצוירת תיבה OABCDKFM , O-ראשית הצירים. שיעורי נקודה K(3,6,5).

זהו את שיעורי קדקודי התיבה ומצאו הצגות של זוגות של ישרים שלא יקבילו לצירים אך:

א. יקבילו. ב. יחתכו. ג. יצטלבו

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

תרגיל

נתונות שתי הצגות פרמטריות של שני ישרים, מצא את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_1: \underline{x} = (6,-1,4) + s(3,-1,1)$, $\ell_2: \underline{x} = (-6,3,0) + r(-12,4,-4)$

תרגיל

נתונות שתי הצגות פרמטריות של שני ישרים, מצא את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_1: \underline{x} = (-1,7,3) + s(6,-12,30)$, $\ell_2: \underline{x} = (17,13,-3) + r(-12,24,-60)$

תרגיל

קבע את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_2: \underline{x} = (1,0,1) + s(2,0,-4)$, $\ell_1: \underline{x} = (3,2,-2) + r(-1,-1,2)$

תרגיל

מצא את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_1: \underline{x} = (1,1,-4) + t(0,2,-4)$, $\ell_2: \underline{x} = (3,3,2) + s(-1,-3,1)$

תרגיל

מצא הצגה פרמטרית של ישר, המקביל לציר ה-y ועובר דרך נקודת החיתוך של הישר

$\underline{x} = (4,2,3) + t(2,1,-1)$ עם ציר ה-z.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

זווית בין שני ישרים

זווית בין שני וקטורים מתאימה למצב ההדדי בין ישרים שהם נחתכים או מצטלבים.

בעצם כאשר הישרים מצטלבים נאמר שהזווית ביניהם היא זווית מדומה.

הזווית ביניהם היא הזווית הקטנה מבין הזווית הנוצרת ביניהם (הזוויות משלימות ל 360 מעלות)

ראינו כי הזווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ (הזווית בתחום: $0° \le \alpha \le 180°$) מקיימת:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{v}\cdot\underline{u}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{u}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

אם נתונים הצגותיהם הפרמטריות של שני ישרים:

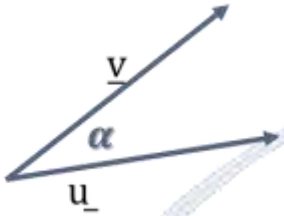
$$\ell_1:\ \underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{v}$$

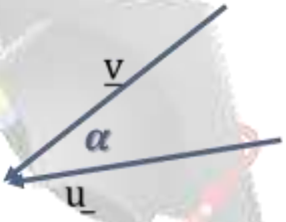
$$\ell_2:\ \underline{x} = \underline{b} + s \cdot \underline{u}$$

הזווית בין שני הישרים מוגדרת **כזווית החדה** בין וקטורי הכיוון $\underline{v}$ ו- $\underline{u}$, כלומר:

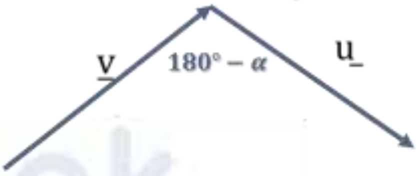
$$\cos\alpha = \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{|\underline{v}| \cdot |\underline{u}|}$$

חישוב זווית בין וקטורים מתאים למקרים הבאים:





עבור המקרה:



נקבל: $180° - \alpha$

הזווית בין 2 וקטורים במרחב עם ייצוג אלגברי:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

תרגיל

חשב את הזווית בין הישר: $\ell_1:\ \underline{x} = (-1,0,1) + t(2,0,1)$

לישר אחר המקביל לוקטור (0,1,1) והעובר דרך הנקודה (2,-1,-1).

תרגיל

ישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות: (1,3,7) ו- (-11,0,1)

וישר שני ℓ_2 עובר דרך הנקודות: (-3,2,-3) ו- (15,-19,9) . מצא את הזווית בין הישרים.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

תרגיל

חשב את הזווית בין הישרים: ישר ℓ_1: x=5+t , y=-1 , z=3+t

ישר ℓ_2 : x= -3-4r , y=6+4r , z=-2-2r

תרגיל

חשב את הזווית בין הישרים: $\ell_1\colon \underline{x} = (1,1,1) + r(8,0,14)$

$\ell_1\colon \underline{x} = (0,2,-1) + s(12,0,21)$

תרגיל

נתון ישר שהצגתו הפרמטרית: $\ell\colon \underline{x} = (-1,0,2) + t(2,-1,-1)$

מצא משוואתו הפרמטרית של ישר המאונך לו בנקודה (1,-1,1)

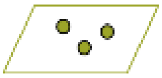
תרגיל

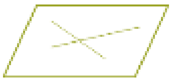
מצא את נקודת החיתוך של הישרים: $\ell_1\colon \underline{x} = (-7,1,3) + t(4,1,2)$

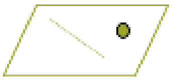
$\ell_2\colon \underline{x} = (3,-5,1) + r(6,-7,-4)$

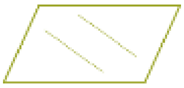
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

הדרכים לקביעת מישור

(1) דרך **שלוש נקודות** שאינן על ישר אחד עובר מישור אחד ויחיד. 

(2) דרך **שני ישרים נחתכים** עובר מישור אחד ויחיד. 

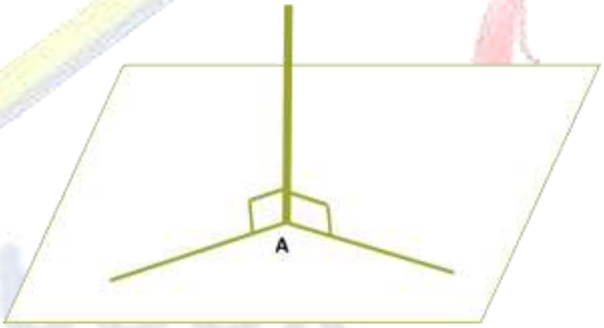
(3) דרך **ישר ונקודה שמחוץ לישר** עובר מישור אחד ויחיד. 

(4) דרך **שני ישרים מקבילים** עובר מישור אחד ויחיד. 

ישר מאונך למישור

ישר המאונך למישור הוא ישר, החותך את המישור ומאונך לכל ישר במישור העובר דרך עקבו.

עקב – נקודת החיתוך של הישר עם המישור (נקודה A)



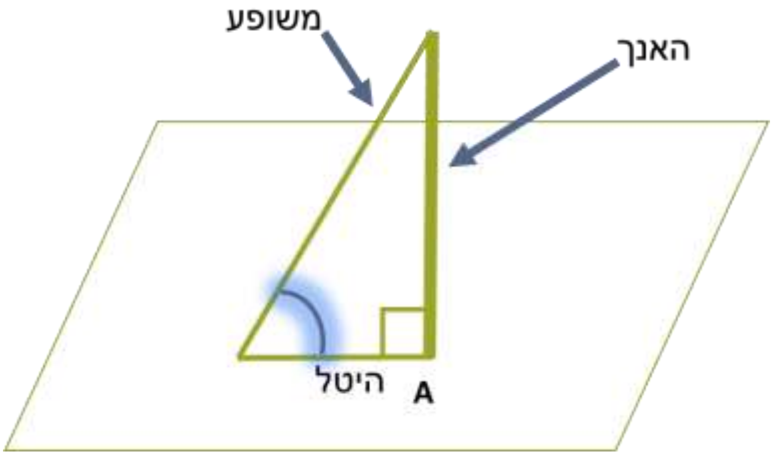
משופע למישור, היטל משופע, זווית בין ישר ומישור

ישר החותך מישור ואינו מאונך לו נקרא **משופע**. (שיפוע)

הישר, המחבר את עקב המשופע במישור עם עקבו של האנך היורד מקצה המשופע, נקרא **היטל המשופע על המישור**.

הזווית(החדה), שבין ישר המשופע למישור, לבין היטלו במישור, נקראת **הזוית בין הישר (משופע) למישור**.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il



משפט: ישר ניצב למישור אם ורק אם הוא ניצב לשני ישרים לא מקבילים במישור.

משוואת מישור / הצגה אלגברית

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

המשוואה הכללית של מישור במרחב היא: ax+by+cz+d=0 או Ax+By+Cz+D=0

למשל: 2x-y+2z+4=0

נכפול את המשוואה פי 2 ונראה: 4x-2y+4z+8=0

נראה שמשוואת המישור אינה יחידה – ניתן לכפול או לחלק את המשוואה בכל מספר השונה מאפס ונקבל משוואה אחרת המתארת את אותו מישור.

התנאי הוא שלא כל מקדמי המשתנים שווים לאפס, כלומר לפחות $a \neq 0$ או $b \neq 0$ או $c \neq 0$

כל נקודה הנמצאת עם המישור מקיימת את משוואת המישור (בדומה למשוואת ישר) ולהיפך.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

תרגיל

מצא משוואת מישור המאונך לוקטור (11,1,-2) והעובר דרך הנקודה (2,-1,3)

תרגיל

מצא משוואת מישור המאונך לישר ℓ_1 הנתון בצורה פרמטרית: $\ell_1: \underline{x} = (1,0,1) + t(4,4,2)$

ועובר דרך הנקודה (0,0,0).

תרגיל

מצא את משוואת המישור העובר דרך נקודות: A(1,4,-1) B(3,6,1) , C(4,1,0)

מצא את הוקטור המאונך למישור.

תרגיל

מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: A(1,1,0) B(0,2,1) , C(3,5,1)

מצא את ההצגה הפרמטרית של ישר, המאונך למישור זה ועובר דרך הנקודה (1,1,1)

תרגיל

מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודה: C(1,2,3)

והישר $\underline{x} = (0,1,0) + t(-1,0,-1)$ נמצא עליו.

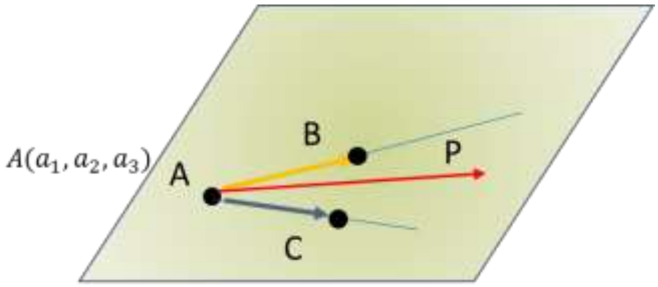
© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

הצגה פרמטרית של מישור

וקטורים פורשים מישור

כל שני ישרים בעלי מוצא משותף A שאינם על ישר אחד קובעים מישור אחד ויחיד.

הוקטור AP מהווה קומבינציה ליניארית של 2 וקטורים הפורשים את המישור



$$\overrightarrow{AP} = t\underline{u} + s\underline{v}$$

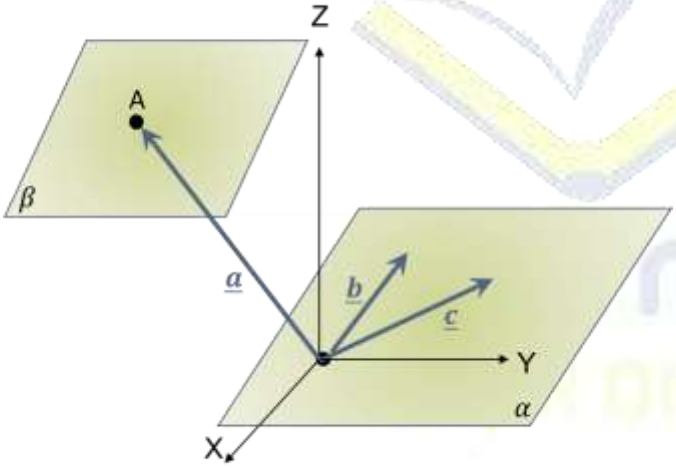
משפט:

תהיינה C,B,A שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.

נקודה P נמצאת במישור ABC אם ורק אם קיימים

סקלרים t ו- s עבורם: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

מישור המקביל לשני וקטורים(המגדירים מישור)והעובר דרך נקודה נתונה



כל נקודה במישור α (מישור העובר דרך ראשית הצירים)

מתקבלת על ידי: $t\underline{b} + s\underline{c}$

אם המישור אינו עובר דרך הראשית אלא דרך נקודה כלשהי,

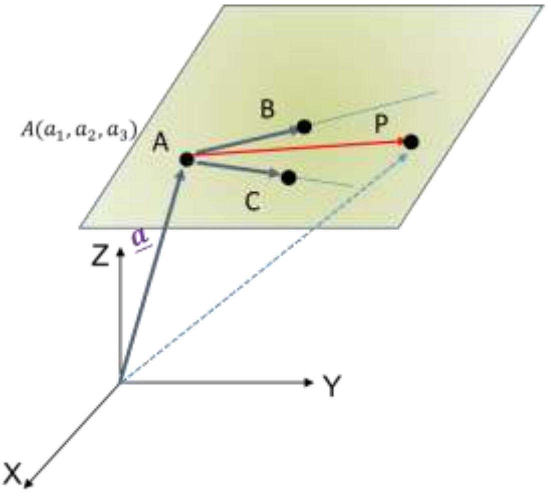
ההצגה הפרמטרית של המישור המקביל למישור α והעובר דרך הנקודה A היא:

מתקבלת על ידי: $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{b} + s\underline{c}$

כאשר $\underline{a}$ הוא וקטור ההעתקה.

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

הצגה פרמטרית של מישור העובר דרך שלוש נקודות



נתון מישור העובר דרך הנקודות A, B ו- C שאינן על ישר אחד.

וקטורים: $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\boldsymbol{c}}$

וקטורי הכיוון של המישור הם: $\underline{\boldsymbol{c}} - \underline{\boldsymbol{a}}$ ו- $\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}}$

וכן $\underline{a}$ הוא וקטור העתקה.

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

הצגה פרמטרית של מישור העובר דרך שלוש נקודות כל שני ישרים נחתכים קובעים מישור אחד ויחיד.

$$\overrightarrow{AP} = t\underline{u} + s\underline{v}$$

הוקטור AP מהווה קומבינציה ליניארית של 2 וקטורים הפורשים את המישור

$$\overrightarrow{OP} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$$

תרגיל

מצא הצגה פרמטרית למישור העובר דרך הנקודות A(2,1,3) , B(-1,0,1) , C(1,1,1)

תרגיל

הראה שההצגה הפרמטרית שלהלן אינה מהווה הצגה פרמטרית של מישור:

$$\underline{x} = (5,2,6) + t(4,-4,4) + s(2,-2,2)$$

תרגיל

נתון המישור: 12x+6y+8z-24=0

א. האם הנקודה A(1,-2,3) נמצאת על המישור. נמק. ב. מצא את נקודות החיתוך של המישור עם הצירים.

ג. המישור חותך את המישור [xy] לאורך ישר. מצא את משוואת הישר במישור [xy].

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

ד. המישור חותך את המישור [xz] לאורך ישר. מצא את משוואת הישר במישור [xz].

ה. המישור חותך את המישור [yz] לאורך ישר. מצא את משוואת הישר במישור [yz].

ו. שרטט את המישור והישרים.

תרגיל

מצא את משוואת המישור הנקבע על ידי הנקודות: $(1,4,0)$, $(0,0,-4)$, $(-1,-2,1)$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

<u>מצב הדדי בין ישר בהצגתו הפרמטרית למישור כשנתונה משוואת המישור</u>

נרשום נקודה אופיינית לישר ונציב אותה במשוואת המישור, כדי למצוא חיתוך בין הישר למישור

יתכנו המקרים הבאים:

<u>מצב הדדי בין ישר בהצגתו הפרמטרית למישור כמשוואה</u>

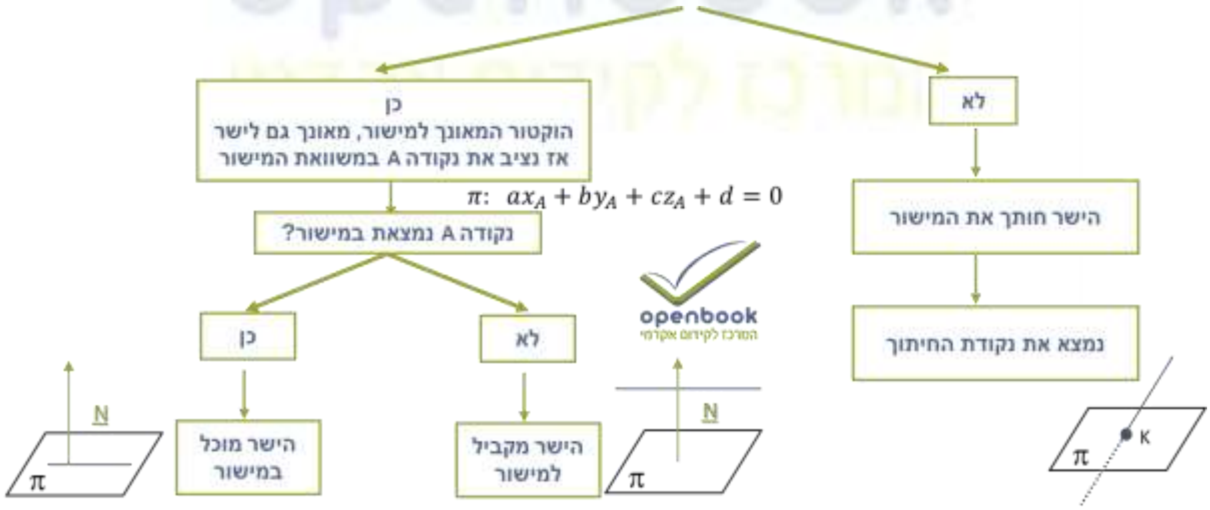
נתונים המישור והישר:

$$\pi:\ \ ax + by + cz + d = 0$$

וקטור המאונך למישור: $\underline{N} = (a, b, c)$.

$$\ell:\ \underline{x} = \underline{A} + t \cdot \underline{u}$$

נבדוק האם הישרים מאונכים $\underline{u} \cdot \underline{N} = 0$



<u>המצב ההדדי של ישר ומישור המישור בהצגתו הפרמטרית</u>

$$\pi:\ \underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

$$\ell:\ \underline{x} = \underline{b} + r \cdot \underline{w}$$

ננסה למצוא חיתוך בין הישר למישור – נשווה את ההצגות הפרמטריות של הישר והמישור

$$\underline{a} + t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v} = \underline{b} + r \cdot \underline{w}$$

נקבל שלוש משוואות עם שלושה נעלמים s, t ו- r.

יתכנו המקרים הבאים:

<u>תרגיל</u>

קבע את המצב ההדדי של מישור: $\pi:\ \underline{x} = (1,2,-4) + t(2,2,0) + s(0,1,-1)$

והישר: $\ell:\ \underline{x} = (3,6,3) + r(1,4,0)$

<u>תרגיל</u>

קבע את המצב ההדדי של מישור: $\pi:\ \underline{x} = (1,-1,1) + t(0,0,1) + s(3,-1,4)$

והישר: $\ell:\ \underline{x} = (2,4,-1) + r(-6,2,-7)$

<u>תרגיל</u>

קבע את המצב ההדדי של מישור: $\pi:\ \underline{x} = 2x - 4y + 8z + 16 = 0$

והישר: $\ell:\ \underline{x} = (10,4,-12) + r(3,1,-5)$

<u>תרגיל</u>

קבע את המצב ההדדי של מישור: $\pi:\ \underline{x} = 2x - y + z - 10 = 0$

והישר: $\ell:\ \underline{x} = (5,-5,-5) + r(3,-4,-10)$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

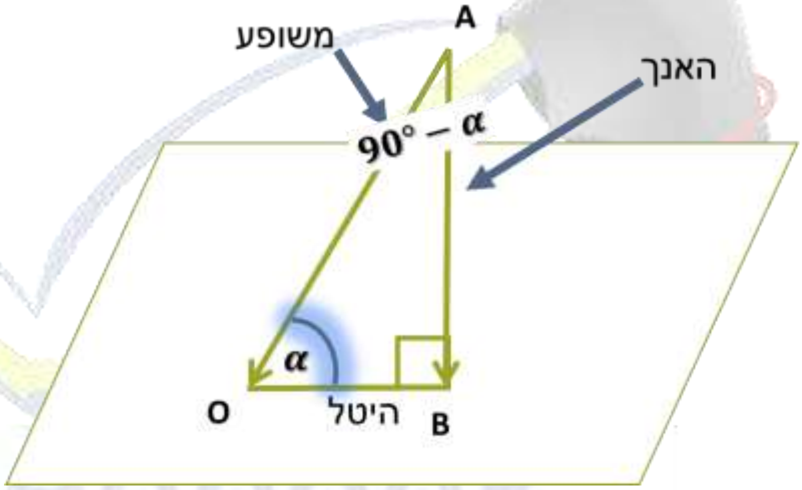
זווית בין ישר למישור

תזכורת - **משופע למישור, היטל משופע, זווית בין ישר ומישור**

ישר החותך מישור ואינו מאונך לו נקרא **משופע**. (שיפוע)

הישר, המחבר את עקב המשופע במישור עם עקבו של האנך היורד מקצה המשופע, נקרא **היטל המשופע על המישור**.

הזווית(החדה), שבין ישר המשופע למישור, לבין היטלו במישור, נקראת **הזוית בין הישר (משופע) למישור**.



$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{u}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{u}|}$$

אם $\underline{u}$ הוא וקטור על הישר ℓ

ו- $\underline{v}$ הוא וקטור המאונך למישור π,

אז הזווית α שבין הישר ℓ למישור π מקיימת:

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{u}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{u}|}$$

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il

© כל הזכויות שמורות למרכז לקידום אקדמי OpenBook © רוית הלפנבאום ©
www.OpenBook.co.il