

ריתמטיקה
מרכז למידה

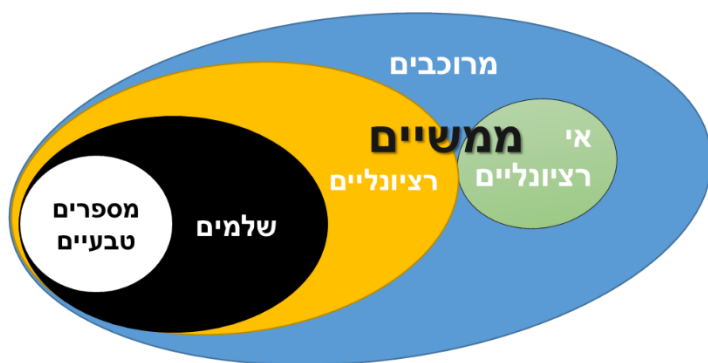
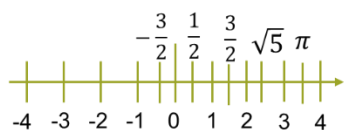


openbook
קורסים אונליין
050-535-0554

איך נבנו המספרים?

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$



?

$$x + 1 = 0$$

?

$$2x = 1$$

?

$$x^2 = 3$$

?

$$x^2 = -1$$

?

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$\Delta < 0$$

המספרים המרוכבים

המספרים המרוכבים הם הרחבה של קבוצת המספרים הממשיים,

המספרים המרוכבים היא קבוצה רחבה יותר של מספרים, שמכילה את המספרים הממשיים, ובה יש לכל המשוואות הפולינומאליות פתרון

מספר מדומה הוא מספר מהצורה bi או i

(מתייחסים לסימון הזה כאל כפל שמיוצג בעזרת אותיות)

כאשר b הוא מספר ממשי השונה מאפס, ו- $i = \sqrt{-1}$.

חזקות של i

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

קיימת מחזוריות בחזקה של i : לאחר כל 4 העלאות חזקה יש חזרה.

לצורך כך, אנו מגדירים מספר, שיסומן באות i , שמקיים:

$$i^2 = -1$$

מספר זה הוא פתרון למשוואה $x^2 + 1 = 0$,

מספר כזה לא יכול להיות ממשי, ולכן אנו מכנים אותו **מספר מדומה**.

ניתן לכפול את i במספרים ממשיים ולחבר אותו עם המספרים הממשיים.

כדי לבצע חיבור בין מספר ממשי למדומה נגדיר קבוצת מספרים נוספת הנקראת

מספרים מרוכבים.

באופן כללי, אם יש לנו שני מספרים ממשיים a, b נוכל על ידי כפל וחיבור עם i לקבל מספר מרוכב מהצורה $a+bi$.

ההצגה בצורה $z=a+bi$ נקראת **ההצגה האלגברית של מספר מרוכב**

✓ **מספר מרוכב** הוא מספר מהצורה $a+bi$ כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים.

✓ **a נקרא החלק הממשי** של המספר המרוכב $a+bi$.

✓ **b נקרא החלק המדומה** של המספר המרוכב $a+bi$ (שימו לב שהחלק המדומה, b , הוא מספר ממשי).

✓ ההצגה בצורה $z=a+bi$ נקראת **ההצגה האלגברית של מספר מרוכב**.

✓ מספר מרוכב נקרא: complex number.

✓ לאור זאת, מקובל לסמן את קבוצת המרוכבים באות $\mathbb{C}$, בעוד שקבוצת הממשיים מסומנת באות $\mathbb{R}$.

✓ החלק הממשי של מספר z נקרא: $\text{Re}(z)$ ומסומן: $\text{Re}(z)$.

✓ החלק המדומה של מספר z נקרא: $\text{Im}(z)$ ומסומן: $\text{Im}(z)$.

✓ תרגיל

חשב:

$$(5i)^2$$

$$(-i)^4$$

$$(2i)^2$$

✓ תרגיל

מיון את המספרים הבאים לפי: מדומים, ממשיים ואחרים:

$$-2i; \sqrt{217} - 5; i \cdot 8.2; i - 2; 8 - i; \sqrt{5}i; \log_8 7; 2i^2; 7i$$

$$-1; \frac{-i}{3}; 5(i - 3); i + i$$

✓ תרגיל

רשום את המספר הממשי (a) והמספר המדומה (b) של המספרים הבאים:

$$6+8i$$

$$-2-3i$$

$$-7$$

$$-3i$$

$$0$$

שוויון של שני מספרים מרוכבים

שני מספרים מרוכבים שווים זה לזה, אם ורק אם הם שווים בחלק הממשי שלהם וגם בחלק המדומה שלהם.

שוויון של שני מס' בהצגה אלגברית

שני המספרים הבאים שווים זה לזה:

$$a + bi = c + di$$

אם ורק אם החלק הממשי של שניהם שווה, $a = c$

וגם החלק המדומה של שניהם שווה. $b = d$

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

נשווה ממשי לממשי ומדומה למדומה

חיבור של שני מספרים מרוכבים

כאשר נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_2 = c + di, \quad z_1 = a + bi$$

אז סכומם הוא:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

החלק הממשי של הסכום הוא סכום החלקים הממשיים של שני המספרים.

החלק המדומה של הסכום הוא סכום החלקים המדומים של שני המספרים.

✓ חיסור מספרים מרוכבים

חיסור של מספר מרוכב הוא חיבור של הנגדי לו:

כאשר נתונים שני מרוכבים:

$$z_2 = c + di, \quad z_1 = a + bi$$

אז הפרשם הוא:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

✓ חשב

א. $(-5 + 4i) + (-2i + 6)$

ב. $2 - (3 - 4i) - (-i)$

ג. $2 - (2 - (2i + 2) - i)$

✓ כפל של שני מספרים מרוכבים

כדי לכפול שני מספרים מרוכבים נבצע פתיחת סוגריים,

תוך שמירה על כללי החשבון המקובלים,

ונעזר בזהות $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

✓ תרגיל

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = 2 + 5i$$

$$z_2 = 6 - 3i$$

חשב את: (1) $z_1 + z_2$ (2) $z_1 - z_2$ (3) $z_1 \cdot z_2$

 תרגיל

א. $(5 + 4i) + (17 + 2i)$

ב. $(-4 - 7i) + (7 - 3i)$

ג. $i(-4 - 7i)$

 תרגיל

מצא את המספרים הממשיים x ו- y המקיימים את המשוואה:

$$(x+3i)(5+yi)=22+7i$$

 תרגיל

מצאו את מכפלתם של המספרים המרוכבים:

$$z_1 = (\sqrt{2} - 1)i$$

$$z_2 = 12 - \sqrt{2}i$$

✓ מספר הצמוד

אם נתון המספר המרוכב: $z = a + bi$

אז המספר הצמוד שלו הוא: $\bar{z} = a - bi$

✓ תרגיל

מצא את המספר הצמוד למספרים הבאים:

א. $3+4i$

ב. $-4-10i$

ג. 4

ד. $-6i$

✓ חילוק – הרחבת שבר פי הצמוד של המכנה

כדי לחשב את המנה $\frac{z_1}{z_2}$ נפעל כך:

שלב (1) נכפול את המונה והמכנה בצמוד של המכנה, כלומר ב- $\bar{z}_2$.

(זכור- מכפלה של מספר מרוכב במספר הצמוד לו היא מספר ממשי, ולכן נקבל במכנה מספר ממשי)

שלב (2) נבצע חילוק של מספר מרוכב במספר ממשי

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$$

✓ תרגיל חילוק במספר ממשי

$$\frac{2 - 9i}{2} =$$

✓ תרגיל - חילוק – כפל וחילוק בצמוד של המכנה

$$\frac{2 - 9i}{1 - 2i} =$$

$$\frac{11 + 2i}{3 - i} =$$

✓ ערך מוחלט

הערך המוחלט מציין את "גודלו" של המספר המרוכב. $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

אם נתון מספר מרוכב בהצגתו האלגברית $z = a + bi$,

אז ערכו המוחלט הוא: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

✓ תרגיל

חשב את הערך המוחלט $|z|$ של המספרים הבאים:

א. $z = -6 + 8i$

ב. $z = -3i$

✓ תרגיל

פתור את המשוואה: $zi + 1 = |z| + 3i$

✓ תרגיל

פתור את המשוואה: $z + |z| = 3 + 9i$

✓ תרגיל

בסדרה חשבונית נתון: $a_1 = -3 + 2i$, $d = 1 - 3i$.

א. חשב את a_{14}

ב. חשב את S_{14}

ג. האם קיים איבר בסדרה השווה ל: $4 - 19i$? האם קיים איבר בסדרה השווה ל: $-1 + 5i$?

ד. האם קיים בסדרה איבר ממשי טהור? אם כן, מצא אותו.

ה. האם קיים בסדרה איבר מדומה טהור? אם כן, מצא אותו.

✓ תרגיל

נתונים 3 איברים ראשונים של סדרה הנדסית: $m + 3i$, $4 + 2i$, $n - 2i$

m ו- n הם מספרים ממשיים

א. חשב את m ו- n.

ב. חשב את מנת הסדרה.

✓ תרגיל

מצא את המקום הגאומטרי של כל המספרים המרוכבים המקיימים את:

- (1) ✓ $z \cdot \bar{z} = 3$
- (2) ✓ $z = 3$
- (3) ✓ $|z - 1| = 8$
- (4) ✓ $|z| \leq 1$
- (5) ✓ $|z - 1| \leq 8$
- (6) ✓ $\frac{|z+i|}{|z-i|} = 1$
- (7) ✓ $|z - i|^2 = z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} + 1$
- (8) ✓ $z = \frac{1}{\bar{z}}$
- (9) ✓ $z + \bar{z} = 4$
- (10) ✓ $|z + \bar{z}| = 4$
- (11) ✓ $z - \bar{z} = 4i$

✓ תרגיל

פתור את המשוואה:

$$|iz|^2 - 4 = 10z - 50i$$

 תרגיל

פתור את המשוואה:

$$i \cdot \bar{z} - 3z = \bar{8}i$$

✓ שורש ריבועי של מספר ממשי

תרגיל:

מצאו את כל השורשים הריבועיים של המספרים הממשיים הבאים:

א. -25

ב. 25

ג. -7

ד. 0

✓ הוצאת שורש ריבועי של מספר מרוכב

הוצאת שורש ריבועי של מספר מרוכב $8-6i$ זה פתרון המשוואה: $z^2 = 8 - 6i$

✓ תרגיל

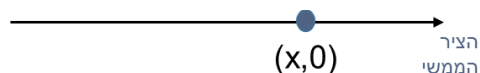
פתור את המשוואה הריבועית: $z^2 - (1 - i)z - 2 + i = 0$

✓ מספר ממשי על ציר המספרים

כל המספרים הממשיים, צורתם $z=x+0\cdot i$

כל מספר ממשי מתאימה הנקודה $(x,0)$ על הציר האופקי שהוא ציר המספרים הממשיים.

לכן, ציר זה נקרא הציר הממשי.



✓ מספר מדומה על ציר המספרים

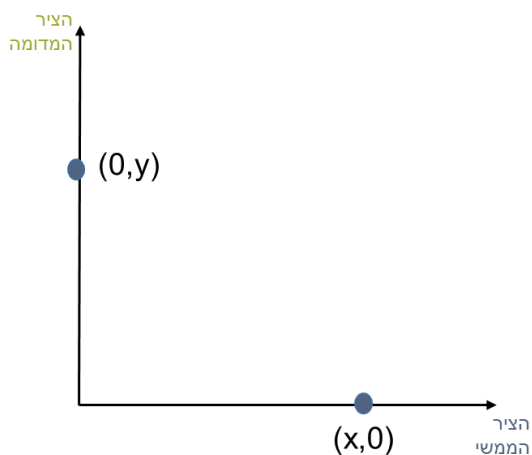
כל המספרים הממשיים, צורתם $z=x+0\cdot i$

כל מספר ממשי מתאימה הנקודה $(x,0)$ על הציר האופקי שהוא ציר המספרים הממשיים.

לכן, ציר זה נקרא הציר הממשי.

כל המספרים המדומים צורתם $z=0+y\cdot i$

כל מספר מדומה מתאימה נקודה $(0,y)$ על הציר האנכי. לכן, ציר זה נקרא הציר המדומה.



הצגה גרפית של המספרים המרוכבים על ידי נקודות

לכל מספר מרוכב $z = x + yi$ מותאמת נקודה יחידה (x, y) ולהפך.

ציר ה- x ציר זה נקרא הציר הממשי

ציר ה- y ציר זה נקרא הציר המדומה

הצגה זו נקראת **ההצגה הקרטזית** או **האלגברית** של המספר המרוכב $z = x + yi$

המישור המיוצר ע"י מערכת הצירים הנ"ל נקרא **המישור של גאוס**

 כל מספר ממשי ניתן להצגה גאומטרית כנקודה על ציר המספרים

 כל מספר מרוכב $z = x + iy$ מייצג את הנקודה (x, y) במישור האוקלידי

 בייצוג הקרטזי, הציר האופקי נקרא **הציר הממשי**, והציר האנכי נקרא **הציר המדומה**.

 אפשר גם לייצג מספר מרוכב כווקטור היוצא מראשית הצירים שראשו בנקודה (x, y) , כאשר x הוא הערך בציר האופקי ו- y הערך בציר האנכי

✓ ערך מוחלט במישור של גאוס

כשעסקנו במספרים ממשיים, ראינו כי אם נתון מספר ממשי a , אז הערך המוחלט שלו מסומן: $|a|$ ומייצג את מרחקה של הנקודה $(a,0)$ מראשית הצירים.

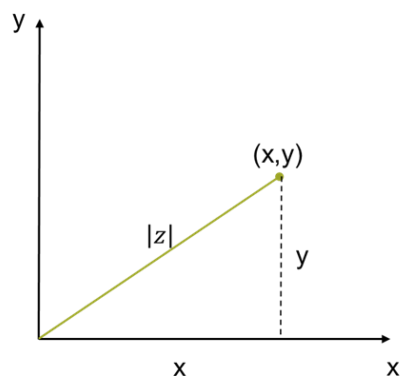
נגדיר את הערך המוחלט של מספר מרוכב:

אם נתון מספר מרוכב בהצגתו האלגברית $z = x + yi$, אז הנקודה המתאימה לו במישור היא (x,y) .

הערך המוחלט של z יסומן $|z|$ מוגדר כמרחק הנקודה (x,y) מראשית הצירים.

לפי משפט פיתגורס או לפי הנוסחה למרחק בין שתי נקודות נקבל:

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



✓ ההצגה הטריגונומטרית (הקוטבית) של מספר מרוכב

לכל נקודה, מתאים קטע המחבר את ראשית הצירים עם הנקודה.

מספר מרוכב $z = x + iy$ ניתן להציג גם באמצעות המרחק שלו מהראשית והזווית שהוא יוצר עם ציר ה- x (המרחק נסמן ב- r).

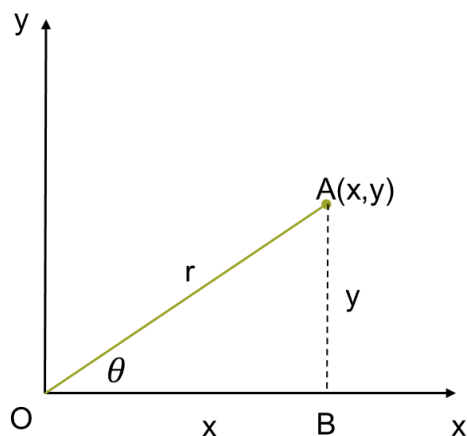
הצגה זו נקראת הצגה קוטבית (פולרית).

על ידי שימוש בטריגונומטריה,

ובסימון $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ המודול של z .

הזווית θ נקראת הארגומנט של המספר המרוכב

ומסומנת $\theta = \arg(z)$



במשולש ישר זווית AOB מתקיים:

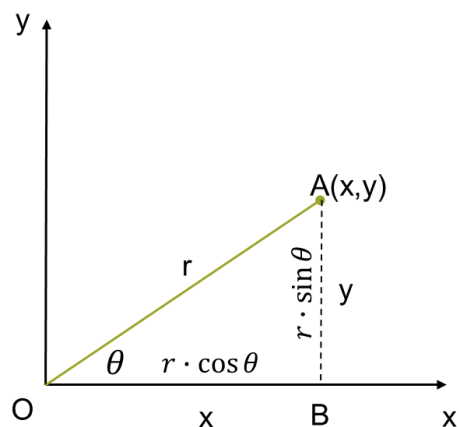
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad (1)$$

$$x = r \cdot \cos \theta \quad \text{ומכאן}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad (2)$$

$$y = r \cdot \sin \theta \quad \text{ומכאן}$$

נביע את המספר המרוכב באמצעות r ו- θ



$$z = x + yi$$

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta) = Rcis\theta$$

✓ מעבר מהצגה טריגונומטרית להצגה אלגברית

כאשר נתון מספר מרוכב בצורה טריגונומטרית $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ורוצים להעבירו

להצגה אלגברית $z = x + yi$ צריך למצוא את x ואת y .

אפשר לעשות זאת באחת משתי הדרכים הבאות:

דרג'א' – נחשב את $\cos\theta$ ואת $\sin\theta$ בעזרת מחשבון ונבצע פתיחת סוגריים.

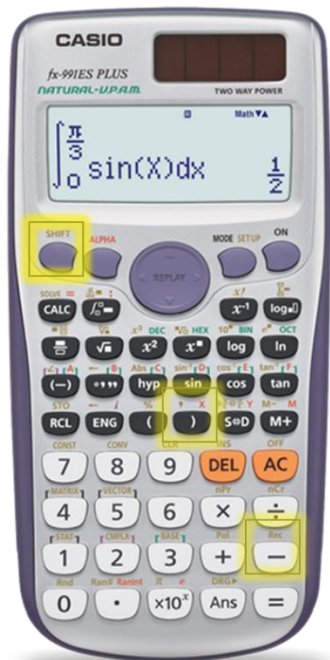
דרג'ב' – נחשב את x ואת y לפי הנוסחאות $x = r \cos\theta$ ו- $y = r \sin\theta$ ונציג את המספר

בצורה $z = x + yi$.

דרג'ג' – חישוב פשוט במחשבון $\theta = RCL \tan$, $r = Pol(a, b)$



מעבר מהצגה טריגונומטרית להצגה אלגברית במחשבון



חישוב פשוט במחשבון

$$z = Rcis\theta$$

Rec → R → , → θ →) → =
Shift - Shift)

למציאת y :

אחרי שנתן את ה- x
נזוז ימינה עם החץ

✓ תרגיל

מצא את ההצגה האלגברית של המספר המרוכב $z = 6cis\ 120^\circ$

✓ תרגיל

כתבו את המספרים הבאים בצורה קרטזית / אלגברית

1. $\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$
2. $2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
3. $2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
4. $2\ cis\ 210^\circ$

✓ מעבר מהצגה אלגברית להצגה טריגונומטרית

כאשר נתון מספר מרוכב בהצגה אלגברית $z = x + yi$

ורוצים להעבירו להצגה טריגונומטרית $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = R \operatorname{cis} \theta$

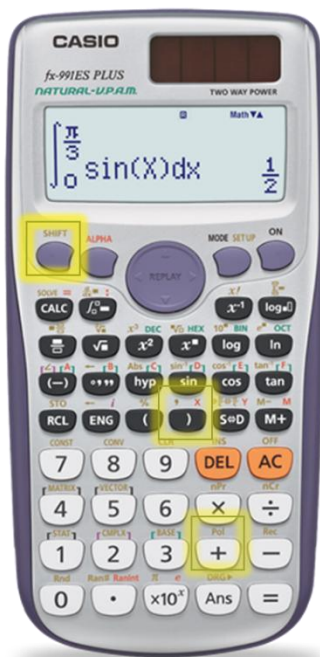
צריך לחשב את r ואת θ . נעשה זאת באופן הבא:

(1) נחשב את $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ כפי שחישבנו את הערך המוחלט:

(2) נחשב את הזווית θ על פי הנוסחה: $\tan \theta = \frac{y}{x}$

זכרו: המחזור של פונקציית הטנגנס הוא 180° ,

מעבר מהצגה אלגברית להצגה טריגונומטרית במחשבון



חישוב פשוט במחשבון

$$z = x + yi$$

Pol → x → , → y →) → =
Shift + Shift)

למציאת הזווית :
אחרי שנתן את ה- R
נזוז ימינה עם החץ

✓ תרגיל

כתבו את המספרים הבאים בצורה קוטבית / טריגונומטרית

א. -2

ב. i

ג. $3 - 4i$

ד. $-\sqrt{3} - i$

✓ תרגיל

מצא את ההצגה הקוטבית של מספר המרוכב $z = -2 + 2i$

מצא את ההצגה הקוטבית של מספר המרוכב $z = 1 - \sqrt{3}i$

תרגיל

נתונים שני מספרים מרוכבים בהצגה הקוטבית שלהם:

$$z_1 = 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

$$z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$$

חשב את המכפלה $z_1 \cdot z_2$

תרגיל

נתונים שני מספרים מרוכבים בהצגה הקוטבית שלהם:

$$z_1 = 8 \cos 110^\circ$$

$$z_2 = 2 \cos 50^\circ$$

חשב את המנה $z_1 : z_2$

✓ תרגיל

נתון $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ מצאו את ההצגה הקוטבית של המספרים:

א. $\bar{z}$

- ב.  $\frac{1}{z}$
- ג.  $|z|$
- ד.  $\frac{1}{z}$
- ה.  $z \cdot \bar{z}$
- ו.  $i \cdot z$
- ז.  $-z$
- ח.  $i \cdot \bar{z}$
- ט.  $-zi$
- י.  $z + \bar{z}$
- יא.  $\frac{\bar{z}}{z}$

✓ משפט דה-מואבר

מנוסחת הכפל, ניתן לקבל את הטענה הבאה:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

n שלם.

ממשפט דה-מואבר, נקבל את השוויון:

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

✓ שורשים מסדר n

פתרונות המשוואה $z^n = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ הם:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

איפה נמצאים פתרונות אלו במישור גאוס?

הפתרונות נמצאים על מעגל שרדיוסו $\sqrt[n]{r}$ והם הקדקודים של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

פתרונות המשוואה מהווים סדרה **הנדסית** שאיברה הראשון:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right)$$

ומנת הסדרה:

$$q = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

סכום פתרונות המשוואה תמיד שווה ל-0.

✓ שורשי היחידה

מקרה פרטי של משוואות מהסוג שראינו הוא משוואה מהצורה $z^n = 1$.

כלומר, נרצה למצוא את השורשים מסדר n של המספר 1.

פתרונות משוואה זו נקראים שורשי היחידה.

דוגמא: פתור את המשוואה $z^3 = 1$

 תרגיל

פתור את המשוואה $z^3 = 1$

פתרונות לבגרויות

✓ בגרות קיץ תשמ"ה

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון:

$$a_1 = 1 + i$$

$$a_2 = 2$$

א. הוכח, כי לכל n טבעי, האיברים העומדים במקומות ה- $(2+4n)$ הם ממשיים

ב. חשב את a_{10}

ג. חשב את $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{16}$

פתרון: א. הוכחה. ב. 32. ג. 2^{68}

✓ בגרות קיץ תשנ"א

האיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא $2i$ והאיבר הרביעי הוא 16.

א. חשב את מנת הסדרה q (מצא את כל האפשרויות).

ב. חשב את האיבר השלישי בסדרה עבור כל אחת מהאפשרויות שמצאת בסעיף א.

ג. הוכח, כי לכל n טבעי, האיברים העומדים במקום ה- $6n+4$ הם ממשיים.

פתרון: א. הוכחה. ב. 32. ג. 2^{68}

✓ בגרות קיץ תשנ"ב

א. פתור את המשוואה $z^4 = 8(1 + i\sqrt{3})$.

ב. הראה כי הפתרונות שמצאת בסעיף א מהווים סדרה הנדסית

✓ בגרות קיץ תשנ"ג

א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .

ג. הראה, בעזרת סעיף ב או בדרך אחרת, שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה,

התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

בגרות חורף תשנ"ה

נתונים שלושה מספרים מרוכבים: $z_1 = -1 + 7i$, $z_2 = a + bi$, $z_3 = c + ci$.

וכן נתון: $|z_2| = 5$, $a > 0$, $z_3 = z_1 \cdot z_2$.

א. חשב את z_2 ואת z_3 .

ב. i הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית. z_2 , שחישבת בסעיף א, הוא איברה השלישי של סדרה זו. מהי מנת הסדרה? (מצא את כל האפשרויות).

בגרות קיץ תשנ"ה

א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה: $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה שבסעיף א, אזי $z^6 = 1$.

בגרות קיץ תשנ"ו

נתונה המשוואה: $(iz + 1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 .

ב. הראה כי: $\left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \right| = \sqrt{3.25}$.

בגרות קיץ תשנ"ז

נתון: $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z \neq 1$.

א. הוכח כי: $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha - 1}{\cos \alpha + i \sin \alpha - 1}$.

ב. עבור $z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ חשב את: $z + z^2 + \dots + z^{100}$. תוכל להיעזר בסעיף א'.

✓ בגרות קיץ תשנ"ח

נתונה סדרה של מספרים מרוכבים לכל n טבעי: $z_n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$

א. הבע באמצעות α את $|z_2 - z_1|$ (הערך המוחלט של $z_2 - z_1$), ואת $|z_3 - z_2|$

ב. הראה כי הביטוי $|z_{n+1} - z_n|$ אינו תלוי ב- n .

✓ בגרות קיץ תש"ס

א. מצא את המספר המרוכב w , הנמצא ברביע הרביעי ומקיים את המשוואה: $|w|i + 2w = \sqrt{3}$.

ב. מצא את פתרונות המשוואה $z^3 = w(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ כאשר w הוא המספר המרוכב שמצאת בסעיף א'.

✓ בגרות קיץ תשס"ב מועד א

בסדרה הנדסית נתון:

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

הראה כי לכל n טבעי סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא 0.

✓ קיץ מועד א' 2004, 035007

א. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים שחלקם המדומה אינו אפס.

הוכח: אם $z_1 + z_2$ וגם $z_1 \cdot z_2$ הם מספרים ממשיים, אזי $\bar{z}_1 = z_2$

ב. נתונה הסדרה ההנדסית $\dots, 2, 1-i, -i$. מצא את a_9

(אין קשר בין הסעיפים)

✓ קיץ מועד ב' 035007, 2004

$|z_1| > |z_2|$, $z^2 - (1 + 3i)z + 2i - 2 = 0$ הם פתרונות המשוואה: z_1 ו- z_2 .

א. חשב את z_1 ואת z_2 .

ב. נתונה הסדרה ההנדסית $a_1, a_2, a_3, \dots$. המקיימת: $a_1 = \frac{z_1}{i}$ ו- $a_2 = 2z_2$.

הראה כי a_{4n+1} הוא מספר ממשי.

✓ חורף 2010

נתון מקום גאומטרי המקיים: $|z - \bar{z} + i| = |3z + \bar{z} - i|$, $z = x + yi$.

מצא את משוואת הישר, המשיק לגרף של המקום הגאומטרי הנתון בנקודה שבה $x=0$.

✓ קיץ 035807, 2010

א. (1) נתונות נקודות המקיימות $1 = \frac{|z^2 - i|}{|z^2 + 3i|}$, $z = x + yi$.

רשום באמצעות x ו- y את משוואת המקום הגאומטרי של נקודות אלה.

(2) באיזה רביע/רביעים נמצא המקום הגאומטרי שאת משוואתו רשמנו בתת סעיף א (1)?
נמק.

ב. (1) מצא את שיעורי הנקודות שנמצאות על המקום הגאומטרי שאת משוואתו רשמנו, ומקיימות $|z|^2 = 1.25$.

(2) איזה מרובע נוצר כאשר מחברים את הנקודות שבתת סעיף ב (1)? נמק.

✓ חורף 2011, 035807

z_1, z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים. z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

$$z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ נסמן}$$

א. האם המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ הוא מספר ממשי, מספר מדומה טהור או מספר שהוא לא ממשי ולא מדומה טהור? נמק.

$$\left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| = \frac{1}{2} \text{ ו- } z_1 \text{ ו- } z_3 \text{ נמצאים על מעגל היחידה}$$

ב. חשב את הערך המוחלט של z_2 .

ג. z_4 הוא הצמוד של z_1 .

הבע באמצעות α את שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1, z_3, z_4 .

✓ קיץ 2011 מועד ב

א. נתון מספר מרוכב z (שהוא לא ממשי) המקיים: $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \beta$, $z \neq 0$

(1) הבע באמצעות β את z . מצא את שני הפתרונות.

$$(2) \text{ האם הביטוי } z^n + \frac{1}{z^n}$$

הוא מספר ממשי טהור או מספר מדומה טהור או מספר המורכב ממספר ממשי וממספר מדומה? נמק.

(ח) הוא מספר טבעי. z הוא המספר הנתון.

ב. נתון כי מספר מרוכב z נמצא ברביע הראשון מחוץ למעגל היחידה.

סרטט במערכת צירים סקיצה של מעגל היחידה,

ומקם בסרטוט את המספר z , ואת:

$$(1) \frac{1}{z} \text{ . נמק.}$$

$$(2) \frac{1}{z} \cdot \text{נמק.}$$

$$(3) z + \bar{z} \cdot \text{נמק.}$$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

חורף 2012

z הוא מספר מרוכב הנמצא ברביע הרביעי, והערך המוחלט שלו הוא 11.

$$\text{נתון: } \left| 1 + \frac{1}{z} \right| = \sqrt{3}$$

O היא ראשית הצירים.

מצא במשולש $O z \bar{z}$:

(1) את זוויות המשולש.

(2) את אורכי הצלעות של המשולש.

חורף תשע"ג, 035007 / 035807

נתונים המספרים המרוכבים z המקיימים: $|z - 3i| = 3$.

(1) סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים z . נמק.

(2) על פי הסרטוט שסרטטת בתת-סעיף א(1), סרטט באותה מערכת צירים את המקום הגאומטרי של המספרים $\bar{z}$.

(3) המספר $z_0 = 1 + iy$ נמצא על המקום הגאומטרי של המספרים z שסרטטת בתת-סעיף א(1).

מצא את המרחק בין הנקודה המייצגת את z_0 ובין הנקודה המייצגת את $\bar{z}_0$.

✓ קיץ תשע"ג, 035807

z הוא מספר מרוכב.

1. פתור את המשוואה $|z|i + 2z = \sqrt{3}$.

2. הראה כי כאשר n הוא מספר טבעי, אז z^{6n} יכול לקבל רק שני ערכים.

קיץ 2015 א

נתונה המשוואה $z^n = 8$, z הוא מספר מרוכב $n > 2$.

א. הוכח כי n הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל.

המספרים z_0, z_1, z_2, z_3 הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין n הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).

z_0 הוא מספר ממשי וחיובי. z_1 נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.

נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}i$.

ב. מצא את הערך של n .

✓ קיץ 2015 מועד ב

א. סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי המקיים $|z^2 - 3i| = |z^2 - i|$.

z הוא מספר מרוכב

ב. שני מספרים מרוכבים שונים, z_1 ו- z_2 , נמצאים על המקום הגאומטרי שסרטטת.

המרחק של z_1 מראשית הצירים שווה למרחק של z_2 מהראשית.

נתון: $z_1 = 1 + iy_1$ (y_1 הוא מספר ממשי).

מצא את הארגומנט של z_2 .

 חורף 2016

המספר המרוכב z_1 נמצא במישור גאוס ברביע הראשון על מעגל שרדיוסו 2 ומרכזו ראשית הצירים O.

המספר המרוכב z_2 נמצא במישור גאוס ברביע השני על מעגל שרדיוסו 4 ומרכזו ראשית הצירים O.

נתון כי הזווית בין הקטע Oz_2 ובין הקטע Oz_1 היא 60° .

המספרים z_1 ו- z_2 הם האיבר הראשון והאיבר השני בסדרה הנדסית בהתאמה.

z_4 הוא האיבר הרביעי בסדרה זו.

א. הראה כי z_1 ו- z_4 נמצאים על קו ישר אחד העובר דרך ראשית הצירים.

ב. נתון גם: $z_1 \cdot z_4 = -32i$.

מצא את הארגומנט (הזווית) של z_4 .

ג. מצא את שטח המשולש $z_1 z_2 z_4$.

✓ **חורף 2017**

z הוא מספר מרוכב. נתונים שני מקומות גאומטריים:

I. $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + z + \bar{z} = 0$

II. $|z|^2 + i(\bar{z} - z) = 0$

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של שני המקומות הגאומטריים.

המקומות הגאומטריים הנתונים נחתכים בשתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$).

ב. מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B.

ג. נתונה הנקודה $P(x_0, y_0)$. הנקודה P נמצאת במרחק שווה מכל הנקודות שעל המקום הגאומטרי I.

נתון: $z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$

הוכח שהמספר הצמוד ל- z_0 נמצא על המקום הגאומטרי II.

ד. נתון: $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ הם שיעורי הנקודה A במצאת בסעיף ב).

✓ 2017א

א. מצא את המספרים המרוכבים z המקיימים $z^3 = -1$.

נסמן את פתרונות המשוואה מסעיף א ב- z_1 , z_2 ו- z_3 .

נתון כי z_2 הוא ממשי.

ב. (1) הראה ש- z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

(2) z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית z_n .

מצא את z_5 , האיבר החמישי בסדרה.

ג. (1) z_{13} , z_{14} ו- z_{15} (האיברים ה-13, ה-14 וה-15 בסדרה z_n שמצאת בסעיף ב)

מיוצגים על ידי הנקודה A, B ו- C במישור גאוס, בהתאמה.

חשב את שטח המשולש ABC.

(2) K, L ו- M הן שלוש נקודות במישור גאוס המייצגות שלושה איברים עוקבים בסדרה z_n .

הסבר מדוע המשולש KLM חופף למשולש שאת שטחו מצאת בתת-סעיף ג(1).

 **2017ב**

במעגל שמרכזו בראשית הצירים במישור גאוס חסום משולש שווה צלעות ABC.

הקדקוד A מתאים למספר המרוכב $z_1 = a - \sqrt{3} \cdot a \cdot i$ ($a > 0$ הוא פרמטר ממשי).

נתון: הקדקוד B נמצא ברביע הראשון.

א. הבע באמצעות a את המספרים המרוכבים z_2 ו- z_3 המתאימים לקדקודים B ו- C בהתאמה.

נתון: $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$.

ב. מצא את a .

ג. המספר z_1^{6n+5} מתאים לנקודה P במישור גאוס. n הוא מספר שלם.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הראה שהנקודה B נמצאת על הקרן OP.

קיץ מועד א 2022 ✓

נתונה המשוואה $z^2 + z\bar{z} = z + 2\bar{z} + 9 + 7i$, הוא מספר מרוכב.

1. z הוא אחד הפתרונות של המשוואה, והוא מייצג נקודה הנמצאת במישור גאוס ברביע הראשון, על מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

א. מצאו את משוואת המעגל.

חוסמים במעגל ריבוע שאחד מקודקודיו מיוצג על ידי המספר z_1

ב. חשבו את שטח הריבוע.

ג. מצאו את השיעורים של שאר קודקודי הריבוע.

מכפילים ב- $r_1(\cos(a)+isin(a))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים הראשון והשלישי, ומכפילים ב- $r_2(\cos(a+30)+isin(a+30))$ כל אחד מן המספרים המייצגים את שני קודקודי הריבוע שנמצאים ברביעים השני והרביעי. הנקודות במישור גאוס המייצגות את התוצאות שהתקבלו לאחר ההכפלה יוצרות מרובע קמור חדש במישור גאוס.

נתון r_1 ו- r_2 חיוביים $r_1 \neq r_2$.

ד. מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את התשובה.

נתון כי שטח המרובע שהתקבל גדול פי $\sqrt{3}$ משטח הריבוע שחישבתם בסעיף ב.

ה. חשבו את $r_1 \cdot r_2$

קיצ מועד ב 2022

המספר $z = R(\cos a + i \sin a)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את a .

$$|2iz| + \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את R .

$$g. \text{ נתונה המשוואה } w^9 = \frac{z^3}{27} \text{ (} z \text{ הוא המספר שמצאתם)}$$

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו-C מתאימים למספרים z ו- $\bar{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע ABOC (הנקודה O היא ראשית הצירים).

נתונה משוואה I: $w^6 = -27$ הוא מספר מרוכב.

א. פתרו את משוואה I.

נתונה משוואה II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z הוא מספר מרוכב.

ב. (1) היעזרו בפתרונות של משוואה I ורשמו בהצגה אלגברית את הפתרונות של משוואה II.

(2) הסבירו מדוע הנקודות במישור גאוס המייצגות את הפתרונות של משוואה II נמצאות על מעגל, ומצאו את משוואתו.

(3) הוכיחו כי כל הפתרונות של משוואה II מייצגים קודקודים של משושה משוכלל במישור גאוס.

נתון: שני הפתרונות המדומים ושני הפתרונות הממשיים של משוואה II מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. (1) מהו סוג המרובע שהתקבל? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשושה ובין שטח המרובע.

 קיץ מועד א 2023

נתונה המשוואה $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z^3 הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב. z_0

הנקודות A, B ו- C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים $d \cdot z_0, d \cdot z_0, d \cdot i$ ו- d .
 $(z_0)^4$ בהתאמה $d > 0$, הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $5+6 \cdot d$.

ב. מצאו את הערך של d .

$$w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{z_0^2} \right) (1 + i)$$

נגדיר:

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC .

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, \dots$ שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא z_1 . q נמצא ברביע הראשון.

$$(z_1)^3 = z_3$$

$$-2z_1 = \bar{z}_3$$

א. הוכיח כי $q = z_1$ או $q = -z_1$.

ב. מצאו את z_1 .

ענו על הסעיפים ג-ד עבור $q = z_1$

ד. z_{4n} ו- z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה (n הוא מספר טבעי).

ג. קבעו בעבור כל אחד מן האיברים אם הוא מדומה או ממשי. נמקו את קביעותיכם.

$$\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$$

ד. מצאו את ערך הסכום:

קיץ מועד מיוחד 2013

$z = x + iy$ הוא מספר מרוכב

א. (1) הראו כי משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות:

$$|z^2 - i| = |z^2 + 3i|$$

היא $y = -1/2x$

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגיאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I.

המקום הגאומטרי שמצוין בתת-סעיף א (1) חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A.

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II.

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I.

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II.

נסמן: $w = r \operatorname{cis} \alpha$ כאשר α בין 0 ל 60 מעלות.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II.

ה. מצאו את w .

$z=x+iy$ (הוא מספר מרוכב x) ו- y הם מספרים ממשיים.)

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור גאוס המקיימות :

$$|9 + 12i| = |10i| - |6 - \bar{z} - 8i|^2$$

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו- z_M מייצגים את הנקודות A ו- M בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו- z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$$2|z_A| = |z_M|$$

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, \dots$.

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A , והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M .

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$

במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.

אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A.

$$BD=2AC$$

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים B, C ו-D.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ב. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $\left(\frac{1}{z}, \dots\right)$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף ב(1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, הוא מספר מרוכב השונה מ-0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת-סעיף ב(2).

ד. מצאו את הערך של r .

א. (1) מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 64i = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

(2) מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $z \frac{z^6 + 64i}{z^2 - 4i} = 0$ (z הוא מספר מרוכב).

הפתרונות שמצאתם בתת-סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע.

מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $90^\circ > \alpha > 0^\circ$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור $\alpha = 45^\circ$? נמקו את תשובתכם.

ד. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של שמצאתם?