


## תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **סדרות הנדסית**, המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

### סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל [info@OpenBook.co.il](mailto:info@OpenBook.co.il)


אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

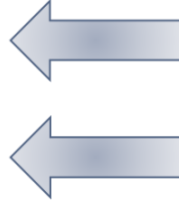
התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!


**המרכז לקידום אקדמי OpenBook.**

## סדרה הנדסית

### מעבר מסדרה הנדסית לחשבונית

סדרה הנדסית  
 $\cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$   
  
 $2, 6, 18, 54, \dots, a_n$



סדרה חשבונית  
 $+3+3 +3$   
  
 $2, 5, 8, 11, \dots, a_n$

מעבר לאיבר הבא כופלים ב-3 כל איבר

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

מעבר לאיבר הבא מוסיפים 3 לכל איבר

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

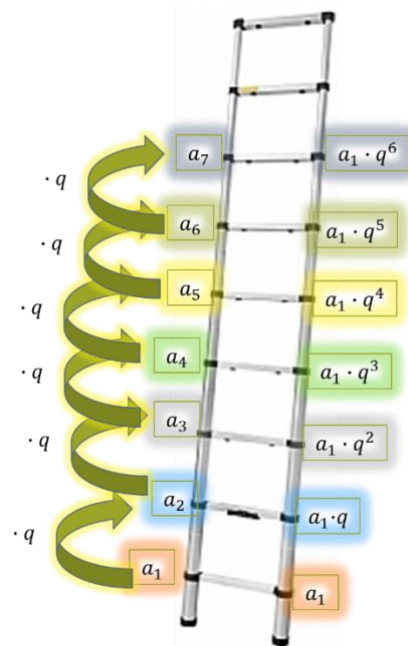
סדרה הנדסית היא סדרת מספרים או אותיות שבה כל מספר (החל מהשני) מתקבל על ידי הכפלת הקודם לו במספר קבוע.

דוגמה: ✓

ביום הראשון פתרה בר 4 תרגילים במתמטיקה.

בכל יום פתרה בר פי 4 תרגילים יותר מאשר ביום שקדם לו.

כמה תרגילים פתרה ביום השביעי?



## תרגילים מציאת האיבר הכללי

(1) ✓

האיבר השלישי בסדרה הנדסית עולה הוא 16. מנת הסדרה היא 2.

א. מצאו את האיבר הראשון  $(a_1)$ .

ב. מצאו את האיבר התשיעי

(2) ✓

נתונה סדרה הנדסית שבה:

$$a_6 = 1215, q = -3.$$

מצאו את  $a_1$ .

(3) ✓

נתונה סדרה הנדסית.  $3, 9, 27, \dots$

1. מצאו את המנה של הסדרה

2. רשמו את שני האיברים הבאים בסדרה

3. מצאו את האיבר ה-12 בסדרה

(4)

נתונה סדרה הנדסית שבה  $a_1 = 3$  ו-  $a_7 = 192$

א. מצאו את מנת הסדרה.

ב. מצאו את האיבר השני של הסדרה.

(5)

בסדרה הנדסית, שאינה עולה ואינה יורדת,

האיבר התשיעי הוא 122, -13, והאיבר השישי הוא -486. מצאו את:

א.  $q$       ב.  $a_1$       ג.  $a_2$

## תנאי לקיום סדרה הנדסית

אם  $x, y, z$  הם שלושה איברים סמוכים של סדרה הנדסית, אז מתקיים:

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$$

מהקשר הזה נקבל:

$$y^2 = z \cdot x$$

אם נבודד את  $y$  (האיבר האמצעי) נקבל:

$$y = \sqrt{z \cdot x}$$

כלומר, כל איבר אמצעי בסדרה הנדסית, שאיבריה חיוביים, הוא ממוצע הנדסי של שני האיברים שסמוכים לו.

✓ (6)

נתונים שלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית עולה:  $2x-7, x+7, 9x+3$ . מצא את  $x$ .

✓ (7)

שלושה מספרים שהראשון בהם 9, מהווים סדרה הנדסית. אם מחסרים מהראשון 1, מהשני 1 ומוסיפים לשלישי 1 מתקבלת סדרה הנדסית חדשה. מצא את שתי הסדרות ההנדסיות.

✓ (8)

המספרים  $x, y, 2$  מהווים סדרה הנדסית עולה וגם המספרים  $y-2, x+2, 4$  מהווים סדרה הנדסית עולה.  
א. מצא את  $x$  ו- $y$ .  
ב. מצא את המנה של כל אחת מהסדרות.

## תרגילים מציאת איבר כללי

✓ (9)

בסדרה הנדסית סכום האיברים השלישי והרביעי הוא 10 וסכום ריבועיהם 52.  
מצא את האיבר הראשון.

✓ (10)

נתונים שלושה מספרים שונים מאפס.  
אם כופלים את המספר השלישי פי 5 מתקבלת סדרה הנדסית.  
אם מוסיפים לריבועו של המספר הראשון 6 מתקבלת גם כן סדרה הנדסית.  
מצא את המספר הראשון.

✓ (11)

בסדרה הנדסית האיבר השלישי גדול ב-15 מהאיבר הראשון וקטן ב-240 מהאיבר החמישי.  
מצא את מנת הסדרה.

✓ (12)

מצא את  $q$  את  $a_1$  עפ"י הנתונים לגבי הסדרות הנדסיות הבאות:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 42$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 168$$

✓ (13)

סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 380.  
סכום שני האיברים הראשונים גדול ב-20 מהאיבר השלישי.  
מצא את שלושת האיברים הראשונים.

✓ (14)

סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה הוא 26.  
האיבר השלישי בסדרה גדול פי 2.25 מסכום שני האיברים הראשונים.  
מצא את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה.

✓ (15)

סכום ארבעה איברים המהווים סדרה הנדסית עולה הוא 45.  
האיבר הרביעי גדול פי  $1\frac{1}{3}$  מסכום האיברים השני והשלישי.  
מצא את ארבעת האיברים.

✓ (16)

בסדרה הנדסית עולה סכום הפרש בין האיבר החמישי לרביעי גדול פי 8 מהפרש שבין האיבר השני לראשון סכום האיברים השלישי הרביעי והחמישי הוא 140.

מצא את האיבר הראשון של הסדרה.

 (17)

סכום ארבעת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית הוא 170 וסכום האיברים הראשון והשלישי הוא 34.

מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון

(הדרכה: מצא תחילה את סכום האיברים השני והרביעי).

 (18)

בסדרה הנדסית סכום האיברים השני והשלישי גדול פי 6 מהאיבר הרביעי.

מצא את 2 הערכים האפשריים למנת הסדרה

 (19)

סכום האיברים השני, השלישי והרביעי בסדרה הנדסית הוא 42.

ההפרש בין האיבר הרביעי לשלישי גדול פי 12 מהאיבר השני.

מצא את האיבר הראשון.

 (20)

האיבר השלישי בסדרה הנדסית גדול ב-20 מהאיבר הראשון והאיבר הרביעי גדול ב-30 מהאיבר השני. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

 (21)

סכומם של 4 מספרים המהווים סדרה הנדסית הוא 65. ההפרש בין האיבר הראשון לשני גדול פי 2.25 מהפרש שבין האיבר השלישי לרביעי. מצא את הסדרה.

 (22)

סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא 336 וסכום האיברים החמישי, השישי והשביעי הוא 21. מצא את האיבר הראשון.

(23)

מצא שלושה מספרים המהווים סדרה הנדסית עולה אם ידוע שמכפלתם היא 64 וסכומם הוא 21.

(24)

בסדרה הנדסית חמישה איברים. סכום כל האיברים בלי הראשון הוא 120 וסכום כל האיברים בלי האחרון הוא 40. מצא את האיבר האחרון.

(25)

בסדרה יש ארבעה איברים:  $3, a_2, a_3, a_4$ . שלושת האיברים הראשונים הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. סכום האיבר השני והאיבר הרביעי הוא 15. סכום האיבר השלישי והרביעי הוא 75. מצא את האיברים  $a_2, a_3, a_4$

(26)

מצא 4 מספרים המהווים סדרה הנדסית אם מכפלת האיבר השני ברביעי היא 100 וסכום האיברים השלישי ורביעי הוא 30.

(27)

האיבר הרביעי בסדרה הנדסית גדול ב- 12 מהאיבר השלישי וקטן ב- 72 מהאיבר השישי. מצא את המנה ואת האיבר הראשון.

(28)

בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לשלישי גדול פי 90 מההפרש בין האיבר השלישי לראשון. מצא את המנה. (הנח שההפרשים הנ"ל שונים מ-0).

## הסכום של סדרה הנדסית

סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

חשוב לזכור את הקשר:  $a_n = S_n - S_{n-1}$



(29)

בסדרה הנדסית:  $1, -2, 4, -8, \dots$

א. מצא את  $a_{10}$

ב. מצא את סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה.



(30)

בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא 1536, והמנה היא 4.

א. מצאו את האיבר הראשון בסדרה.

ב. מצאו את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה



(31)

סכום הסדרה ההנדסית  $1, 4, 16, \dots$  הוא 1365.

כמה איברים בסדרה?



(32)

בסדרה הנדסית  $3, 6, 12, \dots$  יש 18 איברים.

מצא את סכום שמונת האיברים האחרונים



(33)

בסדרה הנדסית יש 12 איברים.

סכום ששת האיברים הראשונים הוא 189 וסכום ששת האחרונים הוא 12,096.

מצא את האיבר הראשון.



## סכום מקומות אי זוגיים וזוגיים – סכום סדרה הנדסית

### סכום מקומות אי זוגיים וזוגיים

- (1) סכום האיברים במקומות **האי זוגיים** – איבר ראשון  $a_1$ , מנת הסדרה:  $q^2$ , מספר האיברים: א. כאשר בסדרה המקורית מס' האיברים זוגי:  $\frac{n}{2}$ .  
ב. כאשר בסדרה המקורית מס' האיברים אי זוגי:  $\frac{n+1}{2}$ .
- (2) סכום האיברים במקומות **הזוגיים** – איבר ראשון  $a_2$ , מנת הסדרה:  $q^2$ , מספר האיברים: א. כאשר בסדרה המקורית מס' האיברים זוגי:  $\frac{n}{2}$ .  
ב. כאשר בסדרה המקורית מס' האיברים אי זוגי:  $\frac{n-1}{2}$ .

### סכום של סדרה הנדסית שהחליפו לה את סימני האיברים במקומות הזוגיים/ האי זוגיים

- (1) נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים  $(2n)$  והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות **האי זוגיים**.

הסדרה המקורית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה:  $-a_1, a_2, -a_3, a_4, \dots, a_{2n}$

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה  $-q$ , האיבר הראשון  $-a_1$ .

- (2) נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים  $(2n)$  והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות **הזוגיים**.

הסדרה המקורית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה:  $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots, -a_{2n}$

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה  $-q$ , האיבר הראשון  $a_1$ .

(34)

בסדרה ההנדסית  $2, 6, 18, \dots$  יש 15 איברים.

א. מצא את סכום האיברים שבמקומות האי זוגיים

ב. מצא את סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.



(35)

בסדרה הנדסית שהמנה שלה היא 2 יש 14 איברים. סכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 10,922. מצא את סכום האיברים שבמקומות האי זוגיים.



(36)

בסדרה הנדסית שבה 10 איברים המנה היא 3. סכום הסדרה גדול ב-14,762 מסכום האיברים שבמקומות הזוגיים. מצא את האיבר הראשון.



(37)

נתונה סדרה הנדסית שיש בה 10 איברים והמנה שלה היא 2. בסדרה הנתונה הפכו את הסימנים של כל האיברים שבמקומות הזוגיים וכך התקבלה סדרה הנדסית אחרת. סכום האיברים של שתי הסדרות ביחד הוא 6,138. מצא את האיבר הראשון של הסדרה הנתונה.



(38)

סכום סדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים הוא 12,285. סכום הסדרה שהחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 4,095. האיבר הראשון הוא 3. מצא את מנת הסדרה ואת מספר האיברים של הסדרה.

(39)

נתונה סדרה הנדסית בת  $2n$  איברים שהמנה שלה היא  $q$ . הוכח:

- א. היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא  $q$
- ב. היחס בין סכום  $n$  האיברים האחרונים לסכום  $n$  האיברים הראשונים הוא  $q^n$
- ג. היחס בין סכום הסדרה לסכום  $n$  האיברים הראשונים הוא  $q^n + 1$
- ד. היחס בין סכום הסדרה לסכום הסדרה שבה הפוכים סימני האיברים שבמקומות הזוגיים הוא  $\frac{1+q}{1-q}$
- ה. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא  $q+1$ .
- ו. היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $\frac{q+1}{q}$



(40)

בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים. סכום האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים הוא 820 וסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים הוא 2,460.

- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. נתון שהאיבר הראשון הוא 1. מצא את מספר איברי הסדרה.



(41)

בסדרה הנדסית שבה יש  $2n$  איברים נתון שסכום ריבועי  $n$  האיברים הראשונים גדול פי  $1\frac{1}{2}$  מסכום  $n$  האיברים שבמקומות הזוגיים. סכום האיברים הראשון והשני הוא 9. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.



(42)

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $\frac{3}{4}$  מסכום כל האיברים.

- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. מצא את האיבר הראשון של הסדרה אם יש בה 8 איברים וסכום האיברים במקומות האי זוגיים הוא 1,640.

(43)

בסדרה הנדסית מספר זוגי של איברים והסכום שלה גדול פי 7 מסכום הסדרה כאשר הופכים בה את הסימנים של האיברים שבמקומות הזוגיים.

- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. מצא את היחס בין סכום הסדרה כאשר הופכים בה את סימני האיברים שבמקומות האי זוגיים, לבין סכום האיברים שבמקומות הזוגיים.

(44)

בסדרה הנדסית נתון:  $(a \neq b)$ ,  $a_1 = a^8$ ,  $a_n = b^8$ ,  $S_n = \frac{b^9 - a^9}{b - a}$ .

- א. הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את המנה  $q$ .  
 ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

(45)

נתונה סדרה הנדסית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

- א. נתון:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{7}{4}$ ,  $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} = \frac{7}{32}$ . מצא את המנה ואת  $a_1$ .  
 ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת:  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ . משתי הסדרות בונים סדרה הנדסית חדשה:  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ . מנת הסדרה החדשה היא 3 וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7,381.  
 (1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החשה ואת  $b_1$ .  
 (2) מצא את מנת הסדרה  $b_n$ .  
 (3) מצא את  $n$ , שעבורו  $b_n = 4 * \frac{8}{27}$ .

(46)

נתונות שתי סדרות הנדסיות:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ,  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  המקיימות:  $b_3 = a_8$ ,  $b_2 = a_5$ .

- א. הראה שלכל  $n$  טבעי מתקיים:  $b_n = a_{3n-1}$ .  
 ב. נתון שהמנה של סדרה ה- $a_n$  היא 3. חשב את היחס:  $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{3n}}$ .

(47)

נתונה סדרה הנדסית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  שבה  $n$  איברים. בונים מהסדרה הנתונה סדרה חדשה  $a_1 + a_n, a_2 + a_{n-1}, a_3 + a_{n-2}, \dots, a_{n-1} + a_2, a_n + a_1$  שבה  $n-1$  איברים. נסמן ב- $S$  את סכום הסדרה הנתונה וב- $T$  את סכום הסדרה החדשה.

- א. הראה שמתקיים:  $2 * S - T = a_1 + a_n$ .  
 ב. נתונה סדרה הנדסית שהאיבר ראשון שלה הוא 1 וסכום  $n$  האיברים הראשונים הוא 364. בסדרה הנ"ל מחברים כל שני איברים סמוכים וכך מתקבלת סדרה הנדסית בת  $n-1$  איברים שסכומם 484. מצא את  $n$ .

(48)

הוכח שהמספרים הבאים הם ריבוע של מספר טבעי:

$$(5 + 2^2)(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}) + 9$$

$$(5^n + 7)(1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1}) + 4$$

(49)

סכום סדרה הנדסית הוא 20 וסכום ריבועי האיברים שלה הוא 205. מצא את מספר האיברים אם האיבר הראשון שווה ל-1/2.

(50)

בסדרה הנדסית שמנתה 2 היחס בין סכום ריבועי איברי הסדרה לבין ריבוע סכום הסדרה הוא  $\frac{65}{189}$ . מצא את מספר האיברים בסדרה.

(51)

בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים יש  $2n$  איברים. סכום  $n$  האיברים האחרונים גדול פי 32 מסכום  $n$  האיברים הראשונים וסכום  $n+2$  האיברים האחרונים גדול פי 16 מסכום  $n+2$  האיברים הראשונים. מצא את המנה ואת  $n$ .

(52)

הסדרה  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  היא סדרה הנדסית. נסמן את:  $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ ,  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ . הוכח:

$$\text{א. } \left(\frac{S}{T}\right) = a_1 \cdot a_n$$

$$\text{ב. } (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$$

(53)

האיבר ה- $n$  של סדרה נתון ע"י  $a_n = a_1 q^{n-1}$  ( $a_1$  ו- $q$  קבועים,  $q \neq \pm 1$ ).

נסמן  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ,  $R_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  הוכח:

$$\text{א. } R_n = \frac{a_1 q(q^n - 1)}{(q - 1)^2} - \frac{na_1}{q - 1}$$

$$\text{ב. } (1 - q)R_n + qS_n = na_1$$

(54)

$$\text{הוכח: } 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots + nq^{n-1} = \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} - \frac{nq^n}{1 - q}$$

(הדרכה: כפול את הסכום שמשמאל ב- $1 - q$ .)

(55)

נתונה סדרה שבה כל איבר גדול פי מספר קבוע  $p$  מסכום כל האיברים שלפניו.

א. הוכח: הסדרה הנ"ל ללא האיבר הראשון, היא סדרה הנדסית שהמנה שלה  $p+1$ .

ב. בסדרה הנ"ל האיבר הראשון הוא 2 והאיבר השלישי 24. מצא את האיבר השני ואת  $P$ .

ג. מצא את האיבר הרביעי בסדרה.

### ✓ חורף 2007 שאלון 005

נתונים שלושה ספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מכפלת שלושת המספרים היא 125.

אם נוסף 1 לכל אחד משני המספרים הראשונים ונחסיר 7 מהמספר השלישי, יתקבלו שלושה מספרים שהם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית חדשה. מצא את שלושת המספרים הנתונים (מצא את שני הפתרונות)

### ✓ קיץ מועד ב מיוחד 2007 שאלון 005

נתון כי  $a_1, a_2, a_3$  הם שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית.

$$a_7 = 32 \text{ גם כי } \frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$$

חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה (מצא את כל האפשרויות)

### ✓ קיץ מועד ב 2007 שאלון 005

מיכל מים מתמלא ב- 5 שעות. היחס בין כמות המים הזורמת למכל מידי שעה ובין כמות המים שזרמה אליו בשעה הקודמת הוא  $q$ .

במשך השעתיים הראשונות זרמו למכל 48 מ"ק מים, ובמשך 4 השעות הראשונות זרמה למכל כמות מים הגדולה פי 2 מכמות המים שזרמה ליכל במשך 4 השעות האחרונות. מצא את נפח המכל.

### ✓ קיץ מועד ב 2008 שאלון 005

נתונה סדרה הנדסית:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

א. האיבר השלישי בסדרה  $a_n$  גדול ב-2 מהאיבר השני, והאיבר הרביעי גדול פי 2 מהאיבר השלישי. מצא את  $a_1$ .

ב. נתונה סדרה הנדסית נוספת:  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$

משתי הסדרות בונים סדרה חדשה:  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$

מנת הסדרה החדשה היא 3, וסכום 10 האיברים הראשונים בסדרה החדשה הוא 7381.

(1) מצא את האיבר הראשון בסדרה החדשה, ומצא את  $b_1$ .

(2) מצא את מנת הסדרה  $b_n$ .

(3) מצא את  $n$ , שעבורו  $b_n = 4 \cdot \frac{8}{27}$ .

### ✓ חורף 2009 מועד לוחמים שאלון 005

בסדרה הנדסית יש מספר זוגי של איברים.

סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

- א. חשב את מנת הסדרה.
- ב. נתון גם כי האיבר הראשון בסדרה הוא 2, וסכום שלושת האיברים האחרונים בסדרה הוא 2688. חשב את מספר האיברים בסדרה.

### **חורף 2010 שאלון 005**

- הזרימו מים לבריכה ריקה, ובתום 5 שעות היא הייתה מלאה.
- כמויות המים שנכנסו לבריכה בכל שעה מהוות סדרה הנדסית. כמות המים שנכנסה לבריכה ב- 3 השעות הראשונות גדולה פי 2.25 מכמות המים שנכנסה ב- 3 שעות האחרונות.
- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. נתון גם כי בשעתיים הראשונות נכנסו לבריכה 1215 מ"ק מים. מצא את נפח הבריכה.

## סדרה הנדסית אינסופית וסכומה

נסתכל על הסדרה ההנדסית האינסופית הבאה:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$  האיבר הכללי של הסדרה הוא  $a_n = \frac{1}{2^n}$  והוא הולך וגדל כאשר  $n$  הולך וגדל ולכן ייתכן שסכום כל הסדרה הוא מס' סופי של איברים. הביטוי הזה שואף לאפס כאשר  $n$  שואף לאינסוף.

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית שבה  $-1 < q < 1$  הוא:  $S = \frac{a_1}{1-q}$

בסדרה הנדסית שהמנה שלה  $q$  היא שבר ( $-1 < q < 1, q \neq 0$ ) קיים גבול אליו שואף סכום  $n$  האיברים הראשונים כאשר  $n$  שואף לאינסוף וגבול זה, הנקרא סכום הסדרה, הוא  $\frac{a_1}{1-q}$ .

אם  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  היא סדרת הסכומים החלקיים של טור הנדסי אינסופי מתכנס אז איברי סדרה זו שואפים ל-  $\frac{a_1}{1-q}$  כאשר  $n$  שואף לאינסוף.

## סדרות הנדסיות המתקבלות מסדרה הנדסית אינסופית נתונה

(1) נהפוך את הסימנים של כל האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה הנתונה נקבל את הסדרה:  $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_1$  והמנה היא  $-q$ . לכן הסכום

$$S = \frac{a_1}{1+q}$$

(2) נשאיר בסדרה הנתונה רק את האיברים שבמקומות האי זוגיים. נקבל את הסדרה:  $a_1, a_3, a_5, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_1$  והמנה היא  $q^2$ . לכן הסכום שלה הוא:  $S = \frac{a_1}{1-q^2}$

(3) נשאיר בסדרה הנתונה רק את האיברים במקומות הזוגיים, נקבל את הסדרה:  $a_2, a_4, a_6, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_2$  והמנה היא  $q^2$ . לכן הסכום שלה הוא:  $S = \frac{a_1 q}{1-q^2}$

(4) נחבר כל שני איברים סמוכים של הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה:  $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_1+a_2$  והמנה היא  $q$ . לכן הסכום הוא:  $S = \frac{a_1+a_1 q}{1-q}$

(5) נעלה בריבוע את כל איברי הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה:  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_1^2$  והמנה היא  $q^2$ . לכן הסכום שלה הוא:  $S = \frac{a_1^2}{1-q^2}$

(6) נכפול כל שני איברים סמוכים של הסדרה הנתונה, נקבל את הסדרה:  $a_1 * a_2, a_2 * a_3, a_3 * a_4, \dots$  האיבר הראשון בסדרה זו הוא  $a_1 * a_2$  והמנה היא  $q^2$ . לכן הסכום

$$S = \frac{a_1^2 q}{1-q^2}$$



(56)

חשב את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית היורדת:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$



(57)

חשב את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית היורדת:

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$



(58)

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 40.

מצא את האיבר הראשון

אם מנת הסדרה היא 0.5.

✓ (59)

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 54.

מצא את מנת הסדרה אם האיבר הראשון הוא 18.

✓ (60)

בטור הנדסי אינסופי שהמנה שלו בין 1- ל 1 וסכומו 32,

סכום ארבעת האיברים הראשונים הוא 30.

מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה

✓ (61)

נתונה סדרה הנדסית אינסופית:  $288, 216, 162, \dots$

חשב את סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השלישי.

✓ (62)

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 72.

סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 48.

מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה

✓ (63)

האיבר הראשון של טור גיאומטרי אינסופי יורד הוא 14. סכום כל האיברים במקומות הזוגיים הוא 24.

מצא את סכום כל האיברים במקומות האי-זוגיים.

✓ (64)

סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת גדולה פי 5 מסכום האיברים במקומות הזוגיים. מצא פי כמה

גדול סכום הסדרה מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

(65)

סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 3 וסכום ריבועי איבריה הוא 1. מצא את המנה ואת האיבר

הראשון של הסדרה הנ"ל.

✓ (66)

מסדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שהמנה שלה בין 1 ל-1. יצרו את הסדרה  $a_1 + a_2 + a_3, \dots$

$a_3 + a_4 + a_5, a_5 + a_6 + a_7, \dots$  שסכומה גדול פי 1.9 מסכום הסדרה המקורית.

מצא את המנה של הסדרה המקורית.

(67)



חשב את סכום הסדרות ההנדסיות האינסופיות הבאות וקבל את התוצאות מימין:

$$2 - \sqrt{2} + 1 - \dots = 4 - 2\sqrt{2} \quad (68)$$

חשב את הסכומים משמאל (המורכבים משתי סדרות הנדסיות אינסופיות) וקבל את התוצאה מימין:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots = \frac{3}{16} \quad (69)$$

א. הוכח: בסדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה  $q$  היא בין  $-1$  ל  $1$  ( $q \neq 0$ ) היחס בין כל איבר לסכום כל האיברים שאחריו הוא  $\frac{1-q}{q}$

ב. נתון שהיחס הנ"ל הוא  $k$ . הבע באמצעות  $k$  את היחס בין סכום הסדרה לאיבר הראשון.

(70)

נתונים  $N$  טורים הנדסיים אינסופיים יורדים שהאיברים הראשונים שלהם הם בהתאמה  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  והמנות הן בהתאמה  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}$ . מצא את  $N$  אם סכום כל הטורים הוא  $135$ .

(71)

א. סכום סדרה הנדסית אינסופית שכל איבריה חיוביים והמנה שלה  $q$  היא בין  $0$  ל  $1$ . הוא  $S$ . סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $T$ . הוכח:  $q = \sqrt[n]{\frac{S-T}{S}}$ .

ב. בסדרה כנ"ל  $T$  הוא הסכום של  $6$  האיברים הראשונים. נתון:  $\frac{T}{S} = \frac{665}{729}$ . מצא את  $q$ .

✓ **קיץ מועד ב 2005 שאלון 005**

בסדרה הנדסית אין סופית סכום האיבר הראשון והאיבר החמישי הוא 5440.

האיבר הראשון גדול מהאיבר הרביעי פי 8.

מצא את:

א. סכום הסדרה.

ב. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה.

✓ **קיץ מועד א 2011 שאלון 005**

הסכום של סדרה הנדסית אין סופית יורדת גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. מצא פי כמה גדול הסכום של הסדרה הנתונה מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי זוגיים.