


תלמידים יקרים

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **חשבון דיפרנציאלי פונקציות טריגונומטריות**, המהווה חלק קטן ממערך גדול של חומר עזר לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.

באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

רוית הלפנבאום

חשבון דיפרנציאלי

לפני צפייה בפרק זה, חשוב שתצפו בפרק פונקציות טריגונומטריות, זהויות

ומשוואות טריגונומטריות

תכונות פונקציית סינוס

פונקציית סינוס מחזורית מדי 360° או 2π רדיאנים, ערכי הפונקציה חוזרים על עצמם

$$\text{חסימות: } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{אי זוגית לכל } x: \sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{סימטרית ביחס לישר: } x = \frac{\pi}{2}: \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{סימטרית ביחס לנקודה } (\pi, 0): \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$$

$$\text{עלייה בתחומים: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\text{ירידה בתחומים: } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\text{חיובית בתחומים: } 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$$

$$\text{שלילית בתחומים: } \pi + 2\pi k \leq x \leq 2\pi + 2\pi k$$

תכונות פונקציית קוסינוס

פונקציית קוסינוס מחזורית מדי 360° או 2π רדיאנים, ערכי הפונקציה חוזרים על עצמם

$$\text{חסימות: } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\text{זוגית לכל } x: \cos(-x) = \cos x$$

$$\text{סימטרית ביחס לישר: } x = \pi: \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$$

$$\text{סימטרית ביחס לנקודה } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right): \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{עלייה בתחומים: } -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$$

$$\text{ירידה בתחומים: } 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$$

$$\text{חיובית בתחומים: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\text{שלילית בתחומים: } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

נגזרת של פונקציות טריגונומטריות

נגזרת של פונקציית סינוס

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $(x^3 + 6 \sin x)'$ ✓

(2) $(x^2 + 3 \sin x)'$ ✓

(3) $(x \sin x)'$ ✓

(4) $(3x \sin x)'$ ✓

(5) $(\sin 4x)'$ ✓

(6) $(\sin 3x)'$ ✓

נגזרת של פונקציית קוסינוס

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

(7) $(2x^4 - 6 \cos x)'$ ✓

(8) $(\cos 2x)'$ ✓

(9) $(2 \cos 8x)'$ ✓

(10) $\left(\frac{x}{\cos x}\right)'$ ✓

(11) $\left(\frac{\cos 4x}{x}\right)'$ ✓

(12) $(\cos^3 x)'$ ✓

נגזרת של פונקציית טנגנס

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan(f(x)))' = \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x)$$

גזור את הפונקציות הבאות:

- (13) $(8 \tan x)'$ ✓
(14) $(2x - 5 \tan x)'$ ✓
(15) $(\tan 5x)'$ ✓
(16) $(x \tan 2x)'$ ✓
(17) $(\tan^4 x)'$ ✓
(18) $(\tan^3 2x + \tan(2x^3))'$ ✓

נגזרת של פונקציות טריגונומטריות

גזור את הפונקציות הבאות:

- (19) $(x + \sin^2 x + \cos x)'$ ✓
(20) $\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)'$ ✓
(21) $\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'$ ✓
(22) $(\sin^2 2x - \cos^2 2x)'$ ✓

פתרונות – פונקציות טריגונומטריות

- (5) $3 \sin x + 3x \cos x$ (4) $\sin x + x \cos x$ (3) $2x + 3 \cos x$ (2) $3x^2 + 6 \cos x$ (1)
(10) $-16 \sin 8x$ (9) $-2 \sin 2x$ (8) $8x^3 + 6 \sin x$ (7) $3 \cos 3x$ (6) $4 \cos 4x$
 $2 -$ (14) $\frac{8}{\cos^2 x}$ (13) $-3 \sin x \cdot \cos^2 x$ (12) $\frac{-4x \sin 4x - \cos 4x}{x^2}$ (11) $\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$
 $\frac{6 \tan^2 2x}{\cos^2 2x} + \frac{6x^2}{\cos^2 2x^3}$ (18) $\frac{4 \tan^3 x}{\cos^2 x}$ (17) $\tan 2x + \frac{2x}{\cos^2 2x}$ (16) $\frac{5}{\cos^2 5x}$ (15) $\frac{5}{\cos^2 x}$
 $4 \sin 4x$ (22) $\frac{1}{1+\cos x}$ (21) $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ (20) $1 + \sin 2x - \sin x$ (19)

ערך הנגזרת, שיפוע המשיק בפונקציות טריגונומטריות

✓ (23)

נתונה הפונקציה $y=2\sin x$

לאילו ערכים של x בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא 1?

✓ (24)

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\sin x$

בנקודה $x = 2\pi$.

✓ (25)

לאילו ערכי x המשיק לגרף הפונקציה $y = -\frac{\cos 3x}{3}$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

יוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ?

✓ (26)

מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=1-2\sin 2x$ בנקודה $x=0$.

✓ (27)

הנגזרת של הפונקציה y היא $y' = 2 \cos 2x + \cos x$

מצא את משוואת המשיק לפונקציה y ששיפועו $-\frac{1}{2}$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ששיעור ה- y של נקודת ההשקה הוא $\sqrt{3}$.

✓ (28)

נתונה הפונקציה $f(x) = x + \sin x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ ונתון הישרים: $y=x-1$, $y=x+1$.

1. מצא את הנקודות המשותפות בתחום

2. הראה שהישרים משיקים לפונקציה בנקודת החיתוך שמצאת

3. מצא את כל הנקודות ההשקה של גרף הפונקציה, לא רק בתחום הנ"ל (פתרון כללי עם k)

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות טריגונומטריות

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של כל אחת מהפונקציות הבאות בתחום הנתון


 (29)

$0 \leq x \leq \pi$ בתחום $y = \sin x$

 (30)

$0 \leq x \leq \pi$ בתחום $y = \sin 2x + x$

נקודות קיצון בקצה התחום – פונקציות טריגונומטריות

 (31)

מצא את נקודות הקיצון הפנימיות ובקצות התחום וקבע את סוג הקיצון: $y = x + 2 \cos x$ בתחום

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

אסימפטוטות אנכיות – פונקציות טריגונומטריות

 (32)

מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה: $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$

 (33)

מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה: $y = \frac{\sin x}{4 \sin x - 4}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$

חקירה של פונקציות טריגונומטריות

✓ בגרות קיץ א 2007 (34)

$$\text{נתונה הפונקציה } y = 8 \sin^2 x - \cos 4x \text{ בתחום } 0 < x < \frac{4}{5}\pi$$

- א. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון.
- ב. מצא את התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה, (U) ואת התחום שבו הפונקציה קעורה כלפי מטה (n) בתחום הנתון.
- ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$ בתחום הנתון. נמק.

✓ בגרות קיץ א 2008 (35)

$$\text{נתונה הפונקציה } y = \frac{\sin x - 1}{\sin x} \text{ בתחום } 0 < x < \pi$$

- א. בתחום הנתון מצא את: (1) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר y.
- (2) נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x
- (3) נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

✓ בגרות קיץ מועד ב 2004 שאלון 006 (36)

$$\text{נתונה הפונקציה } y = \frac{x^2}{4} - \sin x \text{ בתחום } 0 \leq x \leq 2\pi$$

- א. (1) מצא בתחום הנתון את שיעורי x ו-y של נקודות הפיתול של הפונקציה.
- (2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה (U), וכלפי מטה (n).
- ב. ידוע שבתחום הנתון הנגזרת של הפונקציה מתאפסת רק ב- $x=1.025$ בקירוב.
- על סמך הנתונים, ועל סמך סעיף א', שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

✓ בגרות מועד ב מיוחד 2007 שאלון 006 (37)

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{1}{b}(\sin 4x - \cos 4x)$$

$$\text{הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה } x = \frac{\pi}{4} \text{ מקביל לישר } x + y - \frac{\pi}{2} = 0$$

א. מצא את ערך הפרמטר b.

ב. מצא את תחומי העליה של הפונקציה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ג. עבור איזה ערך של m יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק שלושה פתרונות בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$?

✓ 806 שאלון 2009 חורף (38)

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^2 x - a^2 \cos x$, $a > \sqrt{2}$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. בתחום הנתון מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך) את:

(1) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

(2) השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(3) התחום שבו פונקציה הנגזרת $f'(x)$ חיובית, ואת התחום שבו $f'(x)$ שלילית. נמק.

ב. (1) על סמך תת סעיף א(2) ותת סעיף א(3), סרטט סקיצה של $f'(x)$ בתחום הנתון.

(2) נתון כי כל השטח בין הגרף של $f'(x)$ ובין ציר x בתחום הנתון הוא 16 (י"ר). מצא את a.

✓ קיץ מעד א 2010 שאלון 004 המבחן הגנוז (39)

נתונה הפונקציה $y = \frac{a}{1-\sin x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, $a \neq 0$, פרמטר.

א. בתחום הנתון מצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר y.

(3) סימן הפרמטר a, אם ידוע כי בנקודה שבה $x = \pi$ הפונקציה יורדת.

ב. (1) גרף הפונקציה חותך בתחום הנתון את הישר $y=1$ בשלוש נקודות שבהן:

$x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$. מצא את ערך הפרמטר a.

(2) הצב את הערך של a שמצאת, ומצא בתחום הנתון את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. עבור a שמצאת, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

✓ (40) קיץ מועד א 2010 שאלון 004

נתונה הפונקציה $y = \tan x - 2x$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

בתחום הנתון:

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ומצא את האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לצייר ה-y.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

✓ (41) חורף 2010 שאלון 806

נתונה הפונקציה $y = \frac{2 \cos^2(\frac{x}{2}) - 1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})}$ בתחום $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון. מצא את השיעורים של נקודות אלה.

ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסימום של הפונקציה.

מצא בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר, ע"י גרף הפונקציה, ע"י שתי האסימפטוטות של הפונקציה וע"י ציר x.

✓ (42) קיץ מועד א 2010

נתונה הפונקציה $y = 2 - \cos x - \sin^2 x$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

עבור התחום הנתון:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ($f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון).

(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר x בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

ד. גרף הפונקציה $g(x) = a - \cos x - \sin^2 x$ משיק לציר x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו הערך של a ? נמק.

בגרות קיץ מועד ד' 2014

(1) ✓

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sin x} - a \sin x$ ונתון התחום $-\pi \leq x \leq \pi$, a הוא פרמטר חיובי.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. רשום את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה-x.

ג. הוכח שהפונקציה היא אי-זוגית.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ בתחום $0 < x < \pi$.

היעזר בסעיפים הקודמים והראה שהפונקציה $g(x)$ היא אי-שלילית.

(2) ✓

קיץ מועד א 2015 שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ (ראה ציור)

ענה על הסעיפים א, ב ו-ג עבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן

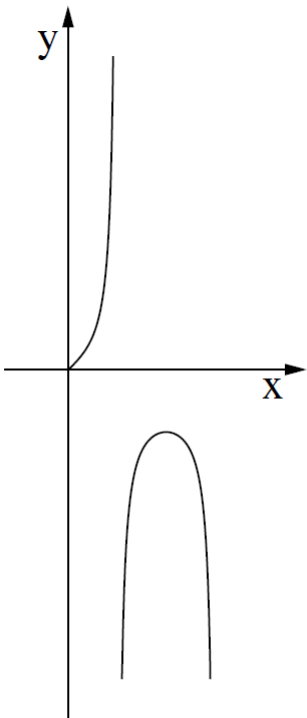
על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $f'(x) = 2f(x)g(x)$.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר

$$x = \frac{\pi}{6}$$



(3) ✓

קיץ מועד א 2015 שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- (3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.
- על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.
- ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים, גדול מ-4, קטן מ-4 או שווה ל-4?
נמק.