


תלמידים יקרים,

אנו גאים להציג בפניכם חוברת זו בנושא **גאומטריה אנליטית אליפסה**,
המהווה חלק קטן ממערך הולך וגדל של חומר עזר לתלמידי תיכון להכנה
לבגרות במתמטיקה באתר **OpenBook**.
באתר קיימים הסברים מוקלטים בווידאו עם שלל אמצעי המחשה שמטרתם
להנגיש את החומר ולהפוך את חווית הלמידה למהנה ומעניינת.

סימונים:

קיים פתרון מוקלט באתר הקורס בלחיצה על הסימן תועבר לדף הרלוונטי באתר. 

מצאתם טעות? נא שלחו הודעה לכתובת המייל info@OpenBook.co.il

אנו מאחלים לכם הנאה בלמידה,

התעשרות בידע ובתובנות וכמובן הרבה הצלחה!

המרכז לקידום אקדמי OpenBook.

סיכום גאומטריה אנליטית – הקו הישר

משוואת הישר המפורשת היא מהצורה: $y=mx+b$.

כאשר m – שיפוע הישר. b – נקודת חיתוך הישר עם ציר ה- y .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות}$$

משוואת הקו הישר ששיפועו m העובר בנקודה (x_1, y_1) היא: $y - y_1 = m(x - x_1)$

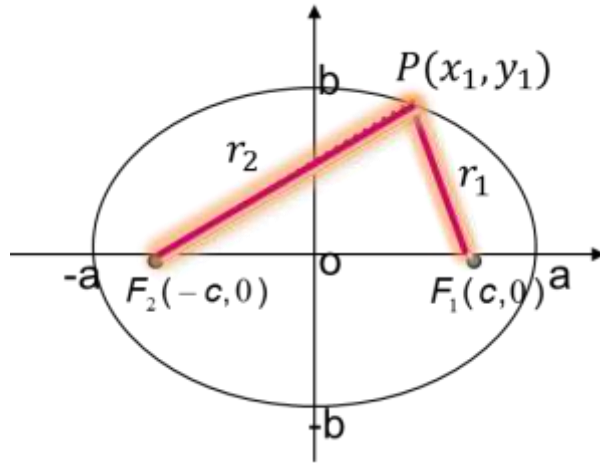
שני ישרים המאונכים זה לזה ששיפועיהם m_1 ו- m_2 הופכיים ונגדיים: $m_1 \cdot m_2 = -1$

אמצע הקטע AB שקצותיו $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$: $\left(x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

המרחק בין 2 נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

אליפסה

המקום הגאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא גודל קבוע השווה לקטע קבוע.



מוקדי האליפסה - את הנקודות הקבועות Focus מסמנים ב- F_2, F_1 . את המרחק בין שני המוקדים מסמנים ב- $2c$

רדיוס וקטור - כל אחד משני המרחקים של נקודה על האליפסה מהמוקדים F_2, F_1 . המרחק מ- F_1 מסומן r_1 , המרחק מ- F_2 מסומן ב- r_2 .

המרחקים של נקודה (x, y) שעל האליפסה מהמוקדים:

$$r_1 = a - \frac{cx}{a} : F_1 \text{ - המוקד הימני}$$

$$r_2 = a + \frac{cx}{a} : F_2 \text{ - המוקד השמאלי}$$

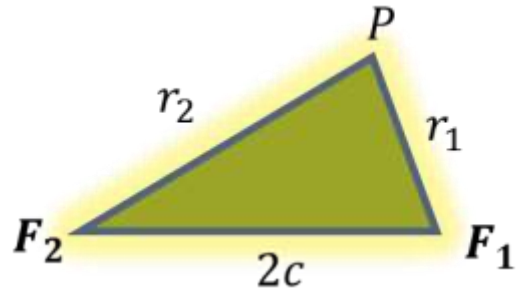
אורך הקטע הקבוע - השווה לסכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים, מסומן ב- $2a$ ולכן: $r_1 + r_2 = 2a$.

יש 2 פרמטרים שמאפיינים את האליפסה והם a, c שניהם חיוביים. מה הקשר ביניהם כדי שתתקבל אליפסה?

התנאי לקיום אליפסה - $a > c$ - כל נקודה A שעל האליפסה יוצרת יחד עם המוקדים משולש AF_1F_2 . תזכורת לגבי משפט: סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

$$r_1 + r_2 > 2c \xrightarrow{r_1+r_2=2a} 2a > 2c \Rightarrow a > c$$

לכן חייב להתקיים:



אליפסה קנונית – כאשר שני המוקדים על ציר ה-x כך שהאנך האמצעי לקטע F_1F_2 מתלכד עם ציר ה-y. שיעורי המוקדים הם: הימני: $F_1(c, 0)$, השמאלי $F_2(-c, 0)$.

משוואת האליפסה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(באליפסה $0 < b < a$, יתקבל מעגל כאשר $a=b$ ולכן $c=0$).

הקשר בין a,b,c: $c^2 = a^2 - b^2$

ציר אופקי/גדול: הקטע המחבר את שתי נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה-x. אורכו 2a.

ציר אנכי/קטן: הקטע המחבר את שתי נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה-y. אורכו 2b.

**נעסוק באליפסות שבהן $a > b$ **

מרכז האליפסה – קנונית - ראשית הצירים $(0,0)$

סימטריות: האליפסה סימטרית לגבי ציר ה-x וסימטרית לגבי ציר ה-y

אם (x_1, y_1) על האליפסה אז גם: $(-x_1, y_1)$, $(-x_1, -y_1)$, $(x_1, -y_1)$ על האליפסה.

a=b: מתקבל מעגל קנוני שמשוואתו: $x^2 + y^2 = a^2$ (כאן $c=0$ שני המוקדים מתלכדים לראשית הצירים)

איזורי המישור ביחס לאליפסה

האליפסה מחלקת את המישור לשלושה חלקים:

(1) הנקודה שבתוך האליפסה; (2) הנקודה שעל האליפסה; (3) הנקודה שמחוץ לאליפסה.

נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ונקודה (x_1, y_1) :

(1) הנקודה נמצאת בתוך האליפסה אם מתקיים: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$

(2) הנקודה נמצאת על האליפסה אם מתקיים: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3) הנקודה נמצאת מחוץ לאליפסה אם מתקיים: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$

תרגיל 1

מצא את משוואת האליפסות הקנוניות הבאות:

- הצירים שלה הם 8 ו-16
- אורך הציר הגדול שלה הוא 20 והמרחק בין מוקדיה הוא 8
- אורך הציר הקטן שלה הוא 12 והיא עוברת דרך הנקודה $(2, -6)$
- המרחק בין מוקדיה הוא $4\sqrt{10}$ והיא עוברת דרך הנקודה $(-6, -4)$

פתרונות: א. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ ב. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1$ ג. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ ד. $\frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{32} = 1$

תרגיל 2

נתונה האליפסה: $16x^2 + 25y^2 = 400$

- הביאו אותה למשוואה קנונית:
- מהו אורך הציר הגדול של האליפסה
- מהו האורך של הציר הקטן של האליפסה
- מצאו את מוקד האליפסה
- שרטטו

פתרון: א. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ב. הציר הגדול: $2a=10$ ג. הציר הקטן: $2b=8$ ד. $c=3$

תרגיל 3

נתונה האליפסה: $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$

מצא את הנקודה על האליפסה שמרחקה מהמוקד השמאלי גדול פי $1\frac{2}{3}$ ממרחקה מהמוקד

הימני. (רשום את שתי האפשרויות)

פתרון: $(8, -12)$, $(8, 12)$

מיתר וקטור באליפסה

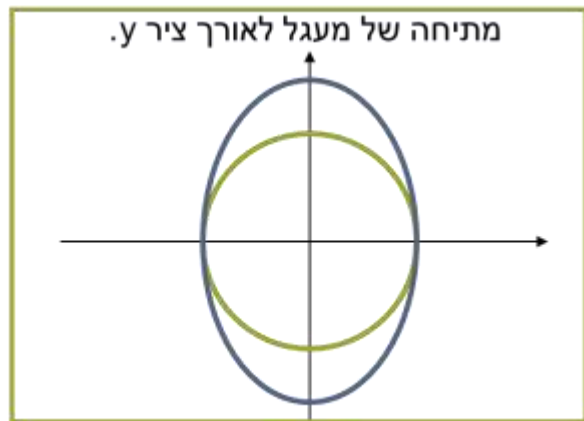
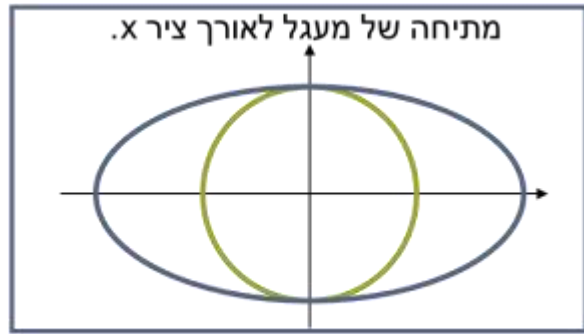
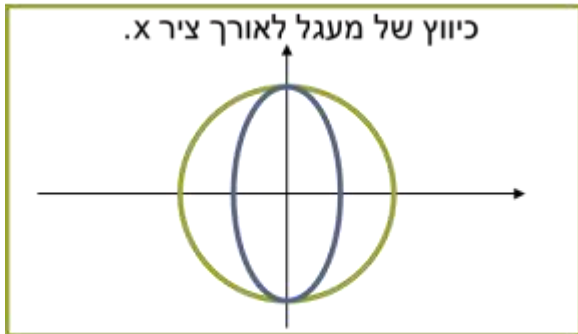
מיתר באליפסה – קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.

קוטר באליפסה – מיתר עובר דרך מרכז האליפסה. (מכיוון שאנחנו מדברים רק על אליפסה קנונית אז הקוטר עובר תמיד בראשית הצירים)

מכפלת השיפועים של מיתר באליפסה והקוטר שחוצה אותו היא: $-\frac{b^2}{a^2}$

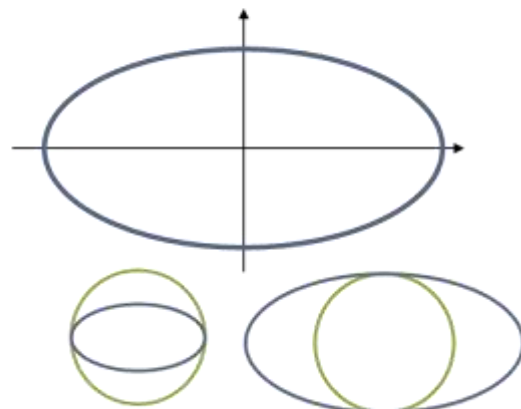
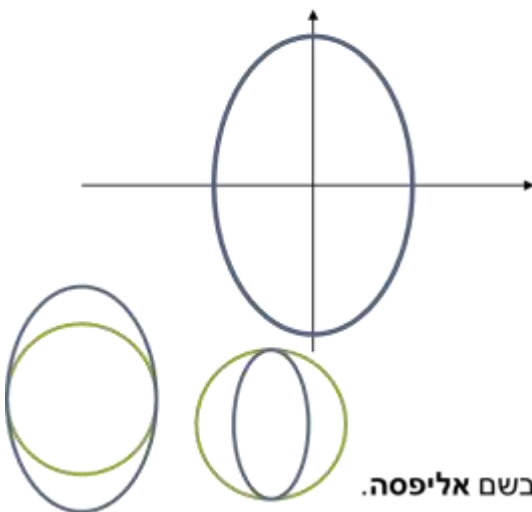
מצא את משוואת הקוטר באליפסה $x^2 + 3y^2 = 41$, אם אורך הקוטר הוא 6.

מתיחה וכיווץ של מעגל ✓



לכיווץ של מעגל לאורך ציר x
ולמתיחה של מעגל לאורך ציר y
יש צורה דומה:

למתיחה של מעגל לאורך ציר x
ולכיווץ של מעגל לאורך ציר y
יש צורה דומה:



נקרא לכל אחת מהצורות הללו בשם אליפסה.

מצב הדדי בין ישר לאליפסה

משוואת האליפסה היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ומשוואת הישר היא: $y = mx + b$ אז כדי למצוא את

המצב ההדדי ביניהם נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + b \end{cases}$$

נקבל משוואה ריבועית – מספר הפתרונות של המשוואה הריבועית שווה למספר הנקודות המשותפות לישר ולאליפסה.

✓ אם $\Delta > 0$ אז למערכת המשוואות יש שני פתרונות והישר חותך את האליפסה בשתי נקודות שונות.

✓ אם $\Delta = 0$ אז למערכת המשוואות יש פתרון יחיד והישר משיק לאליפסה (יש לישר ולאליפסה נקודה משותפת אחת).

✓ אם $\Delta < 0$ אז אין פתרון ממשי למערכת המשוואות והישר יעבור מחוץ לאליפסה – אין נקודה משותפת עם האליפסה.

תרגיל 5

מצא את המצב ההדדי בין הישר לאליפסה. אם הישר משיק לאליפסה מצא את נקודת ההשקה, אם הישר חותך את האליפסה מצא את שיעורי נקודות החיתוך.

פתרון $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ $(-2, -1)$

תרגיל 6 בגרות קיץ מועד ג 2014

נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-16} = 1$, a הוא פרמטר חיובי שונה מ-4.

א. מצא עבור אילו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה.

אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-16} = 1$ חותכת את הקרן השלילית של ציר ה- y בנקודה A . F_1

הוא המוקד הימני של האליפסה, ו- F_2 הוא המוקד השמאלי.

הישר AF_1 יוצר עם הקרן החיובית של ציר ה- x זווית של 26.566° .

ב. מצא את משוואת האליפסה.

ג. מצא את משוואת המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהמוקד F_1 ומן הישר שעובר דרך המוקד F_2 ומקביל לציר ה-y. נמק.

פתרון: א. $a > 4$. ב. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$. ג. $y^2 = 16x$

תרגיל 7 בגרות חורף 2013

נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ (ראה ציור). הם מוקדי האליפסה וקדקודיה הם A, B, A_1, B_1 . נתון כי המוקד F_1 הוא אמצע הקטע AF_2 .

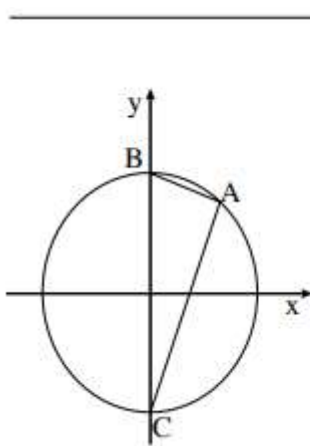
א. מצא את משוואת האליפסה. דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה העבירה מעגל. נתון כי קוטר המעגל הוא $\sqrt{17}$.

ב. העבירו עוד שלושה מעגלים אחרים דרך מרכז האליפסה ושניים מקדקודיה. המרכזים של ארבעת המעגלים הם קדקודים של מרובע.

המרובע, הנמצא במישור $[x, y]$ הוא בסיס של פירמידה שקדקודה הוא $S(0, 3, 4)$. מצא את נפח הפירמידה.

פתרון: א. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. ב. $8\sqrt{2}$

תרגיל מבגרות תשע 2010 שאלון 007



אליפסה, שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a < b$

חותכת את ציר ה-y בנקודות B ו-C.

A היא נקודה על האליפסה ברביע הראשון (ראה ציור).

נתון: $AC = 37$, $BC = 40$, $BA = 13$.

א. מצא את משוואת האליפסה.

דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

במידת הצורך.

ב. נתונה היפרבולה קנונית.

פתרון: $\frac{7x^2}{2304} + \frac{y^2}{400} = 1$

בגרות קיץ ס"ח 2008 מועד א שאלון 007

האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ חותכת את הצירים בנקודות A, B, C, D כמתואר בציור.

מוקדי האליפסה הם: F_1 ו- F_2 .

$$\tan \angle BAC = \frac{24}{7} \cdot (\sqrt{7}, 0) \text{ בנקודה נמצא האליפסה}$$

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. נקודה P היא נקודה כלשהי על האליפסה. הוכח כי:

$$\angle F_1 P F_2 \neq 90^\circ$$

$$\text{פתרון: } 1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

בגרות קיץ ס"ח 2008 מועד ב שאלון 007

נתון משולש שווה צלעות שאורך צלעו 16 יחידות אורך.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ שניים מקודקודי המשולש מונחים על היקף האליפסה}$$

שני קצוות של אחד הגבהים במשולש הם המוקדים של האליפסה.

$$\tan \angle BAC = \frac{24}{7} \cdot (\sqrt{7}, 0) \text{ בנקודה נמצא האליפסה}$$

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. האם קיים משולש ששניים מקודקודיו הם המוקדים של האליפסה שאת משוואתה מצאת

בסעיף א', והקדקוד השלישי שלו נמצא על היקף האליפסה, כך ששטח המשולש הוא 70 יחידות ריבועיות? נמק.

$$\text{פתרון: } 1 = \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{96} \text{ סעיף ב' לא.}$$